



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2025
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik
DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
TEIL II

Fachdidaktische Orientierung
Leitidee *Funktionaler*
Zusammenhang



Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	3
2	BILDUNGSSTANDARDS UND KOMPETENZMODELL IM FACH MATHEMATIK.....	4
3	DIE LEITIDEE FUNKTIONALER ZUSAMMENHANG	7
3.1	SCHWERPUNKTTHEMA: PROPORTIONALE UND ANTIPROPORTIONALE ZUORDNUNGEN	9
3.2	PROPORTIONALE UND ANTIPROPORTIONALE ZUORDNUNGEN IN VERA-8	12
4	ABSCHLIEßENDE ANMERKUNGEN	16
5	LITERATURVERZEICHNIS.....	17
6	ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....	18
7	TABELLENVERZEICHNIS	19
8	VERZEICHNIS DER BEISPIELAUFGABEN	19

Autorinnen und Autoren¹ der fachdidaktischen Erläuterungen in Teil II sind Marlena Meyer, Antonia Rewer und Laura Wirth. Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus zehn Bundesländern und Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern unter Federführung der Arbeitsgruppe Prof. Greefrath, Universität Münster (fachdidaktische Leitung) und des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) e. V.

Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

¹ Aufgrund der dynamischen Diskussion zum sprachlichen Umgang mit geschlechtlicher Vielfalt sowie der Positionierung des Rats für deutsche Rechtschreibung und der Schulbehörden einiger Länder gegen Schreibweisen mit Wortbinnenzeichen (z. B. Genderstern) verwenden wir Doppelnennungen (z. B. Schülerinnen und Schüler) oder geschlechtsneutrale Formulierungen (z. B. Lehrkräfte). Hiermit sind ausdrücklich Personen aller Geschlechter gemeint.

1 Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004, 2005, 2015) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Diese didaktische Handreichung zu VERA-8 verfolgt das Ziel, Sie als Lehrkräfte im Bemühen um einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht zu unterstützen, indem einzelne Testaufgaben erläutert werden, Informationen zu Nutzungsmöglichkeiten der Vergleichsarbeiten im Unterricht gegeben werden sowie auf förderdiagnostische Materialien und auf entsprechende Literatur hingewiesen wird. Sie können daher besonders von Ihnen im Anschluss an die Vergleichsarbeiten genutzt werden, um Schülerinnen und Schülern spezifische Lernangebote zu machen. Es wird zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt. Da sich die Entwicklung der VERA-8 Aufgaben für das Jahr 2025 an den Bildungsstandards aus dem Jahr 2004 orientiert und eine Umstellung in VERA-8 auf die überarbeiteten Bildungsstandards aus dem Jahr 2022 erst zu einem späteren Zeitpunkt erfolgt, bezieht sich auch diese Handreichung auf die Bildungsstandards aus dem Jahr 2004. Anschließend wird einer der Schwerpunkte, die in den diesjährigen Ergänzungsmodulen zur Wahl stehen, näher erläutert: die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* mit einem Fokus auf das Thema *Proportionale und antiproportionale Zuordnungen*. Es werden insbesondere zu Aspekten des Schwerpunktes fachdidaktische Herausforderungen geschildert und Anregungen vorgestellt, wie mit diesen in der unterrichtlichen Praxis im Fach Mathematik umgegangen werden kann. In dem dazugehörigen Kapitel werden außerdem Aufgaben aus VERA-8 präsentiert, die sich der diesjährigen Schwerpunktsetzung zuordnen lassen. Diese ausgewählten Beispiele zeigen exemplarisch, wie bestimmte allgemeine Kompetenzen gezielt durch eine Testaufgabe geprüft werden können. Darüber hinaus werden Hinweise gegeben, inwiefern diese Aufgaben auch im Unterricht als Lerngelegenheit zur Förderung der Kompetenzen eingesetzt werden kann.

2 Bildungsstandards² und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein³. Eine grundlegende Wende stand bevor, da die Qualität von schulischer Arbeit durch nationale Bildungsstandards, welche verbindliche Anforderungen an das Lehren und Lernen in der Schule formulieren, gesichert und gesteigert werden soll (Klieme et al., 2003): Während zuvor der *Input* im Vordergrund stand, also Inhalte und Themen, sollte nun auch der *Output* stärkere Beachtung finden, also die konkreten Kompetenzen, Wissensstrukturen, Werte, über die Schülerinnen und Schüler nach dem Unterricht verfügen sollen. Inhalte sollten mit der Entwicklung von Persönlichkeitsmerkmalen verknüpft werden, die die Basis für ein lebenslanges Lernen legen und so persönliche Weiterentwicklung und gesellschaftliche Teilhabe ermöglichen (Klieme et al., 2003). Die OECD betont dabei den Anwendungscharakter von Mathematik:

„Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit einer Person zum mathematischen Argumentieren sowie Mathematik in einer Vielzahl von Alltagskontexten einzusetzen, in denen Problemstellungen mathematisch formuliert, bearbeitet und interpretiert werden. Dies beinhaltet mathematische Konzepte, Fakten und Methoden, um Phänomene zu beschreiben, zu erklären und vorauszusagen. Mathematikkompetenz hilft Personen zu erkennen, welche Rolle Mathematik in der Welt spielt, um fundierte Urteile abzugeben sowie gut begründete Entscheidungen zu treffen, so wie sie von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern des 21. Jahrhunderts benötigt werden“ (OECD, 2023, Abschnitt Übersicht, Absatz 3, eigene Übersetzung).

Zu diesem Zweck benennen die Bildungsstandards Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe anhand zentraler Fachinhalte erworben haben sollen (KMK, 2004, 2005). Dabei sollte ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schülerinnen und Schülern die folgenden drei *Grunderfahrungen* ermöglichen (Winter, 1995, S. 37):

² Die Bildungsstandards für Mathematik wurden für den Ersten und Mittleren Schulabschluss weiterentwickelt und 2022 von der KMK verabschiedet (KMK, 2022). Die Didaktische Handreichung Teil II bezieht sich auf die Bildungsstandards, die 2004 und 2003 von der KMK beschlossen worden sind, da sich die Normierungsaufgaben für die neuen Bildungsstandards noch in der Entwicklung befinden.

³ <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Bildungsstandards umfassen in ihrem Wesen die benannten Grunderfahrungen sowie Inhalte, Kompetenzen und Niveaustufen, wie das folgende Kompetenzmodell für das Fach Mathematik darlegt. Das Kompetenzmodell liefert einen *Handlungsrahmen* für Lehrpersonen und Schulen, zur Einhaltung verbindlicher Ziele sowie zur Weiterentwicklung von Schule und Unterricht (Klieme et al., 2003). Handlungsrahmen bedeutet insbesondere, dass im Vordergrund die verbindliche Einhaltung von konsensuell ausgehandelten Zielvorgaben steht, wobei den Schulen dabei Freiraum für die innerschulische Lernplanung gelassen wird, um diese Ziele zu erreichen. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Leitideen*
3. *Anforderungsbereiche*

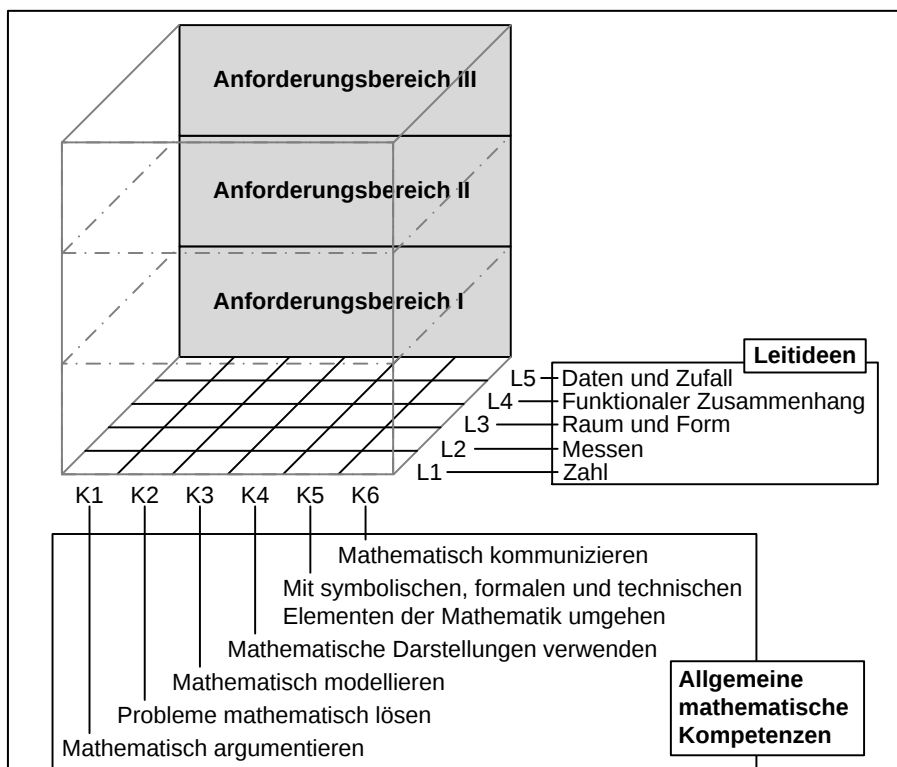


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells. Dabei wird vom Grundgedanken ausgegangen, „das Können der Schüler an den *Kompetenzen* festzumachen, die sie beim Bearbeiten von Aufgaben zu aktivieren haben“ (Leiss & Blum, 2010, S. 33). Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *Mathematisch modellieren* (K3), *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *Mathematisch kommunizieren* (K6). Diese *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* sollen differenziert betrachtet werden, auch wenn sie üblicherweise im Verbund erworben werden und häufig auch gemeinsam angewendet werden müssen. Insbesondere werden bei der Bearbeitung von komplexeren mathematischen Aufgaben oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt. Mit der getrennten Betrachtung ist die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen, was eine differenziertere Planung des Mathematikunterrichts ermöglicht. So kann ein mathematischer Inhalt den Schülerinnen und Schülern entlang verschiedener durchzuführender mathematischer Tätigkeiten zugänglich gemacht werden. Inhalte können durch die multiperspektivische und wiederholte Betrachtung eher in ihrer Gänze verstanden werden und mathematische Kompetenzen anhand unterschiedlichster Erscheinungen über den Inhalt hinaus erworben werden.

Jedoch reicht der Blick auf die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* für eine produktive Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht aus (Leiss & Blum, 2010). Daher bilden die *Leitideen* eine zweite Dimension des Modells. Die fünf Leitideen sind *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). In den Bildungsstandards wird zu den Leitideen erläutert:

„Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2004, S. 9).

Leitideen folgen keinem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“), sondern sie erlauben es, bestimmte mathematische Inhalte unter einer Kategorie zusammenzufassen. Auch soll durch die Betonung von Leitideen deutlich werden, dass sich aus mathematischen Phänomenen wie dem Zählen, dem Messen oder dem Umgang mit Zufällen mathematische Sachgebiete herausgebildet haben (Greefrath 2018, Blum 2010).

Die dritte Dimension enthält die drei *Anforderungsbereiche*. Sie beschreiben die Komplexität von Aufgaben, denn das Bearbeiten und Lösen von Aufgaben fordert mathematische Kompetenzen in unterschiedlichen Ausmaßen (KMK, 2004). Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem *Anforderungsbereich I* werden Anforderungen

an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum *Reproduzieren* unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum *Anforderungsbereich II* zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schülerinnen und Schülern ermöglichen, *Zusammenhänge herzustellen* und Gelerntes

anzuwenden. In den *Anforderungsbereich III* gehören diejenigen Anforderungen, die es Schülerinnen und Schülern abverlangen, zu *verallgemeinern* und zu *reflektieren*.

Im Folgenden wird exemplarisch ein Aspekt der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* herausgegriffen und erläutert. Eine Orientierung des Mathematikunterrichts an den *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* – also der Prozessdimension des Kompetenzmodells – ist eine maßgebliche Errungenschaft der Bildungsstandards, die jedoch auch bei exemplarischer Betrachtung einzelner Leitideen nicht in den Hintergrund geraten sollte.

3 Die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang*

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss werden unter der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* die folgenden, inhaltsbezogenen Kompetenzen zusammengefasst (KMK, 2004):

Die Schülerinnen und Schüler

- *nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge,*
- *erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar,*
- *analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale),*
- *lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen,*
- *interpretieren lineare Gleichungssysteme graphisch,*
- *lösen Gleichungen, und lineare Gleichungssysteme kalkülmäßig bzw. algorithmisch, auch unter Einsatz geeigneter Software, und vergleichen ggf. die Effektivität ihres Vorgehens mit anderen Lösungsverfahren (wie mit inhaltlichem Lösen oder Lösen durch systematisches Probieren),*
- *untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von linearen und quadratischen Gleichungen sowie linearen Gleichungssystemen und formulieren diesbezüglich Aussagen,*
- *bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen und stellen Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph her,*

- *wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an,*
- *verwenden die Sinusfunktion zur Beschreibung von periodischen Vorgängen,*
- *beschreiben Veränderungen von Größen mittels Funktionen, auch unter Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms,*
- *geben zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen an, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können.*

Auch in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss (KMK, 2005) finden sich die aufgeführten inhaltsbezogenen Kompetenzen wieder, wobei prozentualem Wachstum und Maßstäben in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss eine größere Bedeutung zugeschrieben wird. Lineare Gleichungssysteme, quadratische Funktionen, Exponentialfunktionen sowie periodische Vorgänge sind in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss nicht aufgeführt. Da ebendiese inhaltsbezogenen Kompetenzen keinen Bestandteil der VERA-8 Erhebung darstellen, beinhalten die Bildungsstandards beider Abschlüsse für den Lernstand der Jahrgangsstufe 8 im Wesentlichen die gleichen inhaltsbezogenen Kompetenzen.

Funktionale Zusammenhänge sind allgegenwärtig, zum Beispiel die Strecke beim Busfahren, die in einer bestimmten Zeit zurückgelegt wird, oder der Einkaufspreis beim Bäcker in Abhängigkeit von der Anzahl der Brötchen. Immer dann, wenn „eine Größe von einer anderen Größe abhängt“ (Greefrath et al., 2016, S. 36), kommen wir auf natürliche Weise in Kontakt damit. Bereits in der Grundschule werden erste funktionale Denkweisen vermittelt (Vollrath, 1989). Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2005b) beschreiben in dieser Hinsicht die Leitidee *Muster und Strukturen*, an die in der Sekundarstufe I unter anderem die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* anschließt. In der Primarstufe stehen dabei unter anderem die Fähigkeiten im Fokus, funktionale Beziehungen in Sachsituationen zu erkennen, sprachlich zu beschreiben und in Tabellen darzustellen. In der Sekundarstufe I werden daran anknüpfend das kartesische Koordinatensystem und Variablen eingeführt und funktionale Zusammenhänge auch mithilfe von Termen sowie Funktionsgraphen dargestellt. Der Umgang mit proportionalen und antiproportionalen funktionalen Zusammenhängen wird explizit als inhaltsbezogene Kompetenz genannt. Die Schülerinnen und Schüler sollen diese speziellen Arten von funktionalen Zusammenhängen analysieren, interpretieren und vergleichen können. Darüber hinaus sollen sie lernen, realitätsnahe Probleme, denen ein proportionaler oder antiproportionaler Zusammenhang zugrunde liegt, zu lösen. Proportionale sowie anti-proportionale Zuordnungen gehören zu den ersten funktionalen Zusammenhängen, auf die Schülerinnen und Schüler im Unterricht stoßen (Heiderich & Hussmann, 2013) und stellen in den diesjährigen VERA-8 Erhebungen ein Schwerpunktthema dar.

3.1 Schwerpunktthema: *Proportionale und antiproportionale Zuordnungen*

Proportionale und antiproportionale Zuordnungen stellen einen wichtigen alltagsrelevanten Inhalt des Mathematikunterrichts dar (Hafner, 2012). Oftmals werden proportionale Zuordnungen mit Modellierungen im Kontext *Einkaufen* eingeführt. Der Anzahl oder der Menge eines Artikels wird der zugehörige Preis zugeordnet. Hierbei wird üblicherweise vereinfachend angenommen, dass es keine Aktionen oder Rabatte auf diesen Artikel gibt. Aber auch eine Autofahrt mit konstanter Geschwindigkeit kann mit den Größen *zurückgelegte Strecke* und *benötigte Zeit* durch eine proportionale Zuordnung modelliert werden. Demgegenüber stehen Situationen, die mithilfe von antiproportionalen Zuordnungen beschrieben werden können, welche sich in der Realität ebenfalls finden. Konkret lässt sich das Abpumpen eines Wasserbeckens, für das je nach Anzahl identischer Pumpen unterschiedlich viel Zeit benötigt wird, mittels antiproportionaler Zuordnung modellieren. Im Unterricht sollte im Zusammenhang mit proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen immer die entsprechende Modellierung thematisiert werden und oben genannte Vereinfachungen sollten explizit diskutiert werden, um deutlich zu machen, dass die Realität oftmals nur in Grenzen durch ein Modell abgebildet werden kann (Greefrath, 2018). Proportionale und antiproportionale Zuordnungen sollten im Unterricht nicht isoliert voneinander behandelt werden, sondern gerade das Wechselspiel und der Vergleich zwischen ihnen sollten fokussiert werden. Darüber hinaus sollten ebenfalls ausreichend Beispiele herangezogen werden, die der Fehlvorstellung entgegenwirken, dass eine Zuordnung entweder proportional oder antiproportional sein muss. In diesem Zusammenhang könnte beispielsweise thematisiert werden, dass in Supermärkten oft mit verhältnismäßig niedrigeren Preisen für größere Mengen geworben wird. Durch diesen „Mengenrabatt“ wird die Proportionalität aufgehoben.

Je nach Problemsituation können verschiedene Lösungsstrategien verwendet werden, um Aufgabenstellungen, denen ein proportionaler oder antiproportionaler Zusammenhang zugrunde liegt, zu lösen (Hafner, 2012). Diese Lösungsstrategien hängen eng mit den Grundvorstellungen zu proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen zusammen, sodass der Aufbau tragfähiger und vielfältiger Grundvorstellungen dazu beiträgt, dass Problemsituationen adäquat gelöst werden können.

Sowohl für proportionale als auch für antiproportionale Zuordnungen existieren verschiedene Grundvorstellungen, durch die der jeweilige Begriff inhaltlich gedeutet werden kann. Der Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen ist notwendig, um ein tiefgründiges Verständnis mathematischer Begriffe aufzubauen (Greefrath, 2018).

Bei den Grundvorstellungen von proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen handelt es sich um abstrahierte Handlungsvorstellungen. Sie basieren auf den fachlich charakteristischen Eigenschaften.

Die Grundvorstellungen zu proportionalen Zuordnungen sind in Abbildung 2 anhand einer Tabelle veranschaulicht. Die *Vervielfachungsvorstellung* beinhaltet, dass bei einer Vervielfachung der Ausgangsgröße (z.B. Anzahl) auch die zugeordnete Größe (z.B. Preis in €) um denselben Faktor vervielfacht wird. Die *Verhältnissvorstellung* besagt, dass der Quotient zweier Ausgangsgrößen und der Quotient derer zugeordneter Größen gleich ist. Die *Quotientenvorstellung* hingegen basiert darauf, dass der Quotient von zugeordneter Größe und der jeweiligen Ausgangsgröße immer konstant ist. Der Faktor, mit dem die Ausgangsgröße multipliziert wird, um die zugeordnete Größe zu erhalten, nennt sich Proportionalitätsfaktor. Dieser ist charakterisierend für die *Proportionalitätsvorstellung*.

Bei der *Additionsvorstellung* gilt: Werden zwei Ausgangsgrößen miteinander addiert, so erhält man eine neue Ausgangsgröße. Werden die jeweilig zugeordneten Größen der zwei Ausgangsgrößen miteinander addiert, so erhält man die zugeordnete Größe der neuen Ausgangsgröße (Greefrath, 2018; Hafner 2012).

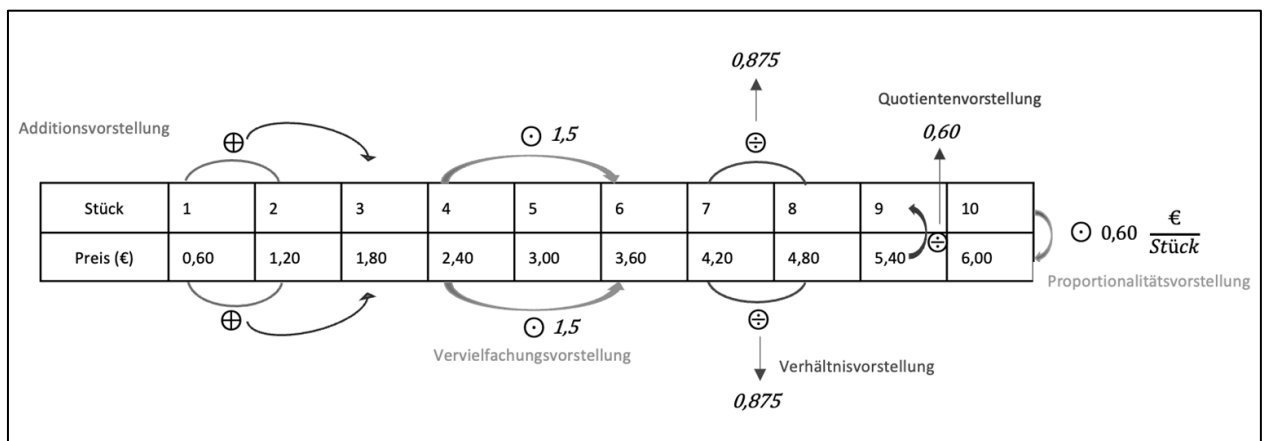


Abbildung 2: Grundvorstellungen proportionaler Zuordnungen am Beispiel „Einkaufen“

Die Grundvorstellungen zu antiproportionalen Zuordnungen lassen sich mit Ausnahme der *Additionsvorstellung* analog herleiten (Abbildung 3).

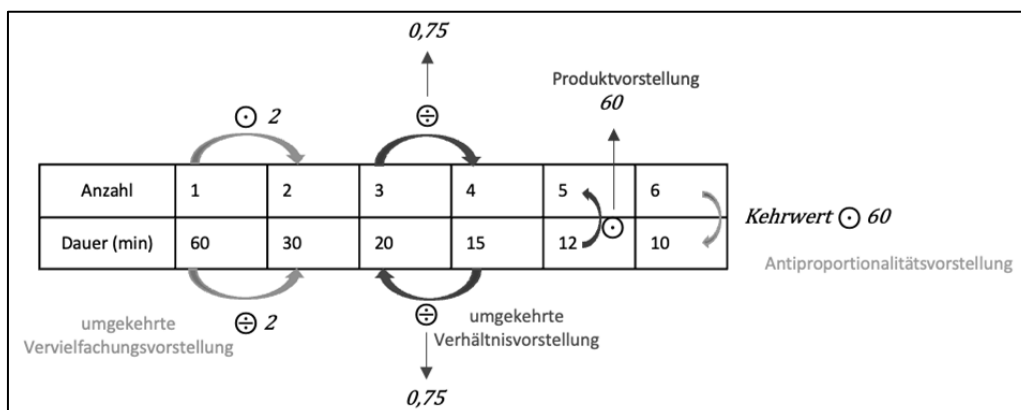


Abbildung 3: Grundvorstellungen antiproportionaler Zuordnungen am Beispiel „Abpumpen“

Alle im Folgenden angeführten Strategien zur Lösung von Aufgaben, für die Proportionalität vorausgesetzt wird (Tabelle 1), können analog auf Aufgaben mit antiproportional zugrunde liegendem Zusammenhang übertragen werden. In der Tabelle 1 wird das Standardverfahren für jede Strategie beispielhaft skizziert. Die genannten Strategien können jedoch auch nicht standardisiert, d.h. zum Beispiel ohne sie konkret in dieser Art zu notieren, durchgeführt werden. Das Aktivieren und Entwickeln solcher eher informeller Strategien fördert ein intuitives proportionales Verständnis (Prediger et al., 2017; Pöhler & Prediger, 2017).

Bei dem *individuellen Dreisatz* kommt die *Vervielfachungsvorstellung* zum Tragen. Ausgehend von dem gegebenen Wertepaar wird durch Multiplikation (Hochrechnen) mit dem passenden Faktor der gesuchte Wert zur Ausgangsgröße ermittelt. Diese Methode bietet sich vor allem dann an, wenn der passende Faktor leicht ersichtlich ist, wie zum Beispiel bei einer Verdoppelung. In anderen Beispielen kann es sich jedoch auch anbieten, ausgehend vom gegebenen Wert durch Division (Runterrechnen) den gesuchten Wert zu ermitteln. Auch eine Kombination aus Hoch- und Runterrechnen ist eine individuelle Anwendung des Dreisatzes. Bei der *Operatormethode* wird der Proportionalitätsfaktor genutzt, um den zugehörigen Wert zur Ausgangsgröße zu berechnen. Bei der *Bruch-/ Verhältnisgleichung* wird von der *Verhältnissvorstellung* oder der *Quotientenvorstellung* Gebrauch gemacht, um eine Bruchgleichung aufzustellen und so den gesuchten Wert zu bestimmen. Bei dem bekannten *klassischen Dreisatz* wird, um von einem gegebenen Wertepaar auf das gesuchte Wertepaar zu kommen, ein Zwischenschritt gemacht. In diesem Zwischenschritt wird das Wertepaar ermittelt, bei dem der erste Wert die Maßzahl 1 hat. Im nächsten Schritt wird das Wertepaar mit dem gesuchten Wert ermittelt. Insgesamt wird also zweimal hintereinander die *Vervielfachungsvorstellung* genutzt.

Individueller Dreisatz	Operatormethode	Bruch-/ Verhältnisgleichung	Klassischer Dreisatz
$\cdot 2 \left(\begin{array}{l} 3 \text{ Stück} \triangleq 1,80 \text{ €} \\ 6 \text{ Stück} \triangleq 3,60 \text{ €} \end{array} \right) \cdot 2$	$3 \text{ Stück} \xrightarrow{\cdot 0,60 \frac{\text{€}}{\text{Stück}}} x$ $x = 3 \cdot 0,60 \text{ €} = 1,80 \text{ €}$	$\frac{1,80 \text{ €}}{3 \text{ Stück}} = \frac{x}{5 \text{ Stück}}$ $x = \frac{1,80 \text{ €} \cdot 5 \text{ Stück}}{3 \text{ Stück}} = 3,00 \text{ €}$	$\begin{array}{l} :3 \left(\begin{array}{l} 3 \text{ Stück} \triangleq 1,80 \text{ €} \\ 1 \text{ Stück} \triangleq 0,60 \text{ €} \end{array} \right) :3 \\ \cdot 6 \left(\begin{array}{l} 1 \text{ Stück} \triangleq 0,60 \text{ €} \\ 6 \text{ Stück} \triangleq 3,60 \text{ €} \end{array} \right) \cdot 6 \end{array}$

Tabelle 1: Lösungsstrategien am Beispiel „Einkaufen“

Welche Strategie gewählt wird, hängt einerseits von der konkreten Aufgabe und dem darin gegebene Zahlenmaterial ab und andererseits von individuellen Präferenzen der Schülerinnen und Schüler (Hafner, 2012).

Durch die Vermittlung von tragfähigen Grundvorstellungen kann das flexible Einsetzen verschiedener Lösungsstrategien gefördert und der reinen Anwendung auswendig gelernter Schemata ohne tiefgründiges Verständnis entgegengewirkt werden.

Sowohl proportionale als auch antiproportionale Zuordnungen können in unterschiedlichen Formen dargestellt werden: algebraisch, graphisch, tabellarisch und verbal. Um mit unterschiedlichen Problemsituationen umgehen zu können, ist die Fähigkeit erforderlich, flexibel zwischen Darstellungsformen wechseln zu können. Da Darstellungswechsel Schülerinnen und Schülern häufig Schwierigkeiten bereiten (Nitsch, 2015), sollten diese im Unterricht besonders intensiv betrachtet werden. Anwendungsbezogene Aufgaben im Zusammenhang mit proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen sollten zum Beispiel nicht immer nur die reine Übersetzung von Text zu Tabelle erfordern (Greefrath, 2018), sondern auch andere Darstellungswechsel in den Fokus rücken.

3.2 Proportionale und antiproportionale Zuordnungen in VERA-8

Im Folgenden werden Aufgaben aus vergangenen VERA-8 Erhebungen dargestellt, in denen Proportionalität bzw. Antiproportionalität eine Rolle spielen. Diese Aufgaben werden hinsichtlich ihrer geforderten Kompetenzen analysiert.

Bei der Aufgabe „Tropfender Wasserhahn“ geht es um den proportionalen Zusammenhang zwischen vergangener Zeit nach Beginn der Beobachtung eines tropfenden Wasserhahns und der Menge Wasser, die in dieser Zeit aus dem Hahn getropft ist. Für beide Teilaufgaben ist es notwendig, den Aufgabentext und die Tabelle in Teilaufgabe 1 und die Graphen in Teilaufgabe 2 sinnentnehmend zu erfassen (*Mathematisch kommunizieren* - K6) und zu erkennen, dass das gleichmäßige Tropfen mathematisch als ein proportionales Wachstum modelliert werden kann (*Mathematisch modellieren* - K3).

Beispielaufgabe 1: „Tropfender Wasserhahn“

Bei Familie Rector tropft seit einigen Tagen ein undichter Wasserhahn. Ben, der Sohn der Familie, will untersuchen, wie viel Wasser dabei verloren geht. Er fängt das gleichmäßig tropfende Wasser in einem Messbecher auf.

Teilaufgabe 1:

Ben sieht ab und zu nach, wie viel Wasser inzwischen im Messbecher ist. Die Tabelle zeigt Bens Messergebnisse.

Zeit in h	0,5	4
Wasser in cm ³	150	1200

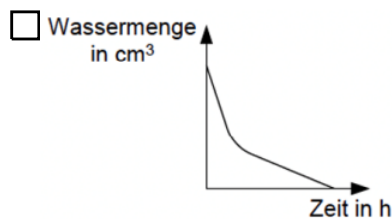
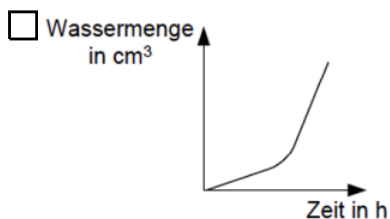
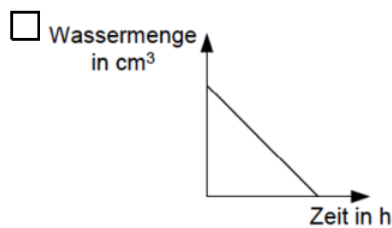
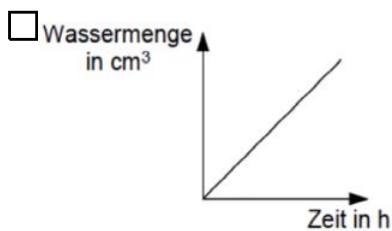
Gib an, wie viel nach zwei Stunden im Messbecher war.

..... cm³

Teilaufgabe 2:

Welches Diagramm stellt die verlorene Wassermenge in Abhängigkeit von der Zeit am besten dar?

Kreuze an.



In Teilaufgabe 1 soll dann die Wassermenge nach 2 Stunden bestimmt werden. Für die Berechnung müssen die Schülerinnen und Schüler eines der in der Tabelle angegebenen Wertepaare nutzen. Mit einer der oben genannten Strategien (*individueller Dreisatz*, *Operatormethode*, *Bruch-/ Verhältnisgleichung*, *klassischer Dreisatz*) oder auch nicht standardisierten Variationen können sie dann den fehlenden Wert bestimmen. Hierbei handelt es sich um die Anwendung eines Routineverfahrens, weshalb ebenfalls die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) in geringem Maß gefordert wird. Auch wenn in der Erhebung nur das Ergebnis erfasst wird, macht es bei ähnlichen Aufgaben im Unterricht Sinn, den Lösungsweg der Schülerinnen und Schüler zu betrachten

und verschiedene Lösungswege zu thematisieren. Auf diese Weise können unterschiedliche Grundvorstellungen zu proportionalen Zuordnungen in den Vordergrund rücken. So könnte bei der vorliegenden Aufgabe vor allem der individuelle Dreisatz als effiziente Lösungsstrategie thematisiert werden, da durch Vervierfachung des ersten angegebenen Wertepaares oder durch Halbierung des zweiten Wertepaares direkt der gesuchte Wert bestimmt werden kann.

Die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) steht in Teilaufgabe 2 im Vordergrund. Die Schülerinnen und Schüler müssen von einer verbal beschriebenen Situation zu einer graphischen Darstellung wechseln, um den passenden Graphen auszuwählen. Aus didaktischer Sicht sind Darstellungswechsel zwischen Text und Graph auch deshalb von Interesse, da hier – anders als bei der Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs als Funktionsgleichung – *symbolische, formale und technische Elemente der Mathematik* (K5) weitgehend ausgeklammert werden können. Hierdurch ergeben sich mindestens zwei Potenziale: Zum einen kann durch den Darstellungswechsel zwischen Text und Funktionsgraph direkt das Verständnis funktionaler Zusammenhänge von Schülerinnen und Schülern adressiert werden. Es wird keine zusätzliche Hürde dadurch errichtet, dass Schülerinnen und Schüler zum Beispiel mit Symbolen für Variablen arbeiten oder rechnerisch Lösungsverfahren durchführen. Zum anderen können auch solche funktionalen Zusammenhänge in den Blick genommen werden, die Lernenden auf algebraischer Ebene (noch) nicht bekannt sind. Damit kann zum Beispiel die Absicht verbunden werden, einer zu starken Überbetonung bestimmter funktionaler Zusammenhänge entgegenzuwirken. Nimmt man im Unterricht stets nur eine einzige Funktionsart in den Blick, besteht die Gefahr, bei Schülerinnen und Schülern den Eindruck hervorzurufen, dass im Grunde alle funktionalen Zusammenhänge proportional, antiproportional usw. sind.

Daher sollte an verschiedenen Stellen in unterschiedlichen Jahrgangsstufen das Verständnis der Lernenden von funktionalen Zusammenhängen gefordert und gefördert werden. Lernaufgaben können so aussehen, dass Schülerinnen und Schüler zu einer in einem Text geschilderten Situation einen Graphen skizzieren oder umgekehrt zu einem Graphen eine Geschichte entwickeln. Zur Überprüfung, zum Beispiel in Klassenarbeiten, können Aufgaben wie diese mit geschlossenen Antwortformaten verwendet werden. In höheren Jahrgangsstufen können dann die Aufgaben auch durch verschiedene Funktionstypen bereichert werden.

Beispielaufgabe 2: „Fliesen“

Zum Fliesen eines Küchenbodens werden 100 Platten mit einer Größe von jeweils $0,16\text{ m}^2$ benötigt. Der Besitzer entschließt sich dann aber doch, Fliesen der Größe $0,2\text{ m}^2$ verlegen zu lassen.

Gib an, wie viele Fliesen jetzt mindestens benötigt werden.

..... Fliesen

In der Aufgabe „Fliesen“ geht es um den funktionalen Zusammenhang zwischen der Größe einer Fliese und der Anzahl der für die Küche benötigten Fliesen. Die Schülerinnen und Schüler sollen annehmen, dass es sich hierbei um einen antiproportionalen Zusammenhang handelt. Zur Bearbeitung der Aufgabe sind dem Aufgabentext zunächst die relevanten Informationen (z.B. Anzahl der benötigten kleineren Fliesen) zu entnehmen (*Mathematisch kommunizieren* - K6). Zur Lösung der Aufgabe können wieder die im vorherigen Kapitel beschriebenen Strategien angewendet werden. Unter anderem bietet sich besonders die Bruch- und Verhältnisgleichung an, die im Folgenden anhand der Aufgabe „Fliesen“ dargestellt wird.

Bruch- Verhältnisgleichung: $\frac{0,16}{0,2} = \frac{x}{100}$

$$x = \frac{0,16 \cdot 100}{0,2} = 80$$

Alternativ kann so vorgegangen werden, dass zuerst die Größe der auszulegenden Fläche berechnet wird (16 m^2). Hierbei kommt die Produktvorstellung zum Tragen. Anschließend kann dann mittels der Antiproportionalitätsvorstellung die Anzahl der Fliesen bestimmt werden, die bei den neuen größeren Fliesen benötigt wird ($16\text{ m}^2 : 0,2\text{ m}^2 = 80$). Dies stellt die Operatormethode bei antiproportionalen Zusammenhängen dar. Diese Aufgabe fordert und fördert dementsprechend die Anwendung von Routineverfahren sowie den Umgang mit vertrauten Symbolen (*Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* - K5).

Bei Verwendung dieser oder ähnlicher Aufgaben im Unterricht sollten vor allem Vereinfachungen thematisiert werden, die getroffen werden, um den Kontext als antiproportionale oder proportionale Zuordnung zu modellieren. Bei der Aufgabe „Fliesen“ werden vor allem zwei Aspekte Zwecks einer Vereinfachung außer Acht gelassen. Einerseits wird die Form der Fläche des Küchenbodens und andererseits die Form der Fläche der Fliesen nicht berücksichtigt. Diese könnten jedoch entscheidend dafür sein, wie viele Fliesen letztendlich benötigt werden, wenn man den potenziellen Verschnitt miteinbezieht. Aufgrund des unterschiedlichen Verschnitts, je nachdem welche Fliesen verlegt werden, kann der Zusammenhang dann nicht mehr als antiproportional behandelt werden. Es sollte thematisiert werden, wie in der Realität

in solch einer Situation vorgegangen werden würde. Vermutlich würde eher zuerst die Länge und Breite des Raumes ausgemessen werden, um dann die Anzahl der benötigten Fliesen zu bestimmen, indem berechnet wird, wie viele Fliesen in die Länge bzw. Breite passen. Geht es darum, wie viele Fliesen letztendlich bestellt werden sollten, um den gesamten Raum zu fliesen, würde man vermutlich einige Fliesen in Reserve mitbestellen, falls bei der Arbeit welche kaputt gehen. Das Treffen und Beschreiben von Annahmen und Vereinfachungen ist vor allem hinsichtlich des *Mathematischen Modellierens* (K3) eine wichtige Kompetenz, die bei den Schülerinnen und Schülern gefördert werden sollte.

Insgesamt konnte anhand der beiden Aufgaben vergangener VERA-8 Erhebungen zu proportionalen bzw. antiproportionalen Zuordnungen gezeigt werden, inwiefern verschiedene Grundvorstellungen zum Tragen kommen, welche Lösungsstrategien je nach Aufgabe sinnvoll zu thematisieren sind und warum auch Darstellungswechsel von großer Bedeutung sind.

4 Abschließende Anmerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalten erneut zwei Themenschwerpunkte aus zwei Leitideen, die als Ergänzungsmodule für die VERA-8 Testung zur Auswahl stehen. Im Bereich der Leitidee *Raum und Form* ist dies der Schwerpunkt *Räumliche Geometrie*, im Bereich der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* der Schwerpunkt *Proportionale und antiproportionale Zuordnungen*. Aus beiden Themen wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Für weitere Anregungen für die Unterrichtspraxis sei auf die Kommentare zu den einzelnen Aufgaben in Teil III der didaktischen Handreichungen verwiesen. Zudem wurde aufgezeigt, welche Aufgabenmerkmale mit welchen allgemeinen mathematischen Kompetenzen einhergehen. Für weitere Beispiele und Anregungen stellt die in den vorangegangenen Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar.

5 Literaturverzeichnis

- Blum, W. (2010). Einführung. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen Scriptor.
- Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht: Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-57680-9>
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Hafner, T. (2012). Proportionalität und Prozentrechnung. In T. Hafner (Hrsg.), *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I: Empirische Untersuchung und didaktische Analysen* (S. 33–60). Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8668-2_5
- Heiderich, S. & Hußmann, S. (2013). „Linear, proportional, antiproportional... Wie soll ich das denn alles auseinanderhalten“ – Funktionen verstehen mit Merksätzen?! In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten: Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S. 27–45). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-658-00992-2_3
- Klieme, Eckhard; Avenarius, Hermann; Blum, Werner; Döbrich, Peter; Gruber, Hans; Prenzel, Manfred; Reiss, Kristina; Riquarts, Kurt; Rost, Jürgen; Tenorth, Heinz-Elmar; Vollmer, Helmut J.; Bundesministerium für Bildung und Forschung. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise*. Bonn, Berlin.
- KMK. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. Wolters Kluwer.
- KMK. (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss vom 15.10.2004*. Wolters Kluwer.
- KMK. (2005b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München, Neuwied: Luchterhand.

- KMK. (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012*. Wolters Kluwer.
- Leiss, D., & Blum, W. (2010). Beschreibung zentraler Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen Scriptor.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-10157-2>
- OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.
- Pöhler, B., & Prediger, S. (2017). Verstehensförderung erfordert auch Sprachförderung – Hintergründe und Ansätze einer Unterrichtseinheit zum Prozente verstehen, erklären und berechnen. In A. Fritz, S. Schmidt, & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 436–459). Beltz.
- Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S., & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2017). *Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen*. Sachrechnen: Größen – Überschlagen – Textaufgaben – Diagramme – Proportionen – Prozentrechnung. Cornelsen.
- Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10, 3–37.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 21(61), 37–46. <https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214>

6 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards	5
Abbildung 2: Grundvorstellungen proportionaler Zuordnungen am Beispiel „Einkaufen“	10
Abbildung 3: Grundvorstellungen antiproportionaler Zuordnungen am Beispiel „Abpumpen“	10

7 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Lösungsstrategien am Beispiel „Einkaufen“	11
--	----

8 Verzeichnis der Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1: „Tropfender Wasserhahn“ (IQB)	13
Beispielaufgabe 2: „Fliesen“ (IQB).....	15