



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2023

8. Jahrgangsstufe (VERA-8)

Mathematik – Didaktische Handreichung

Teil II

Fachdidaktische Orientierung
Leitidee *Messen* und Leitidee
Funktionaler Zusammenhang



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	3
2	Bildungsstandards und Kompetenzmodell im Fach Mathematik	3
3	Die Leitidee Messen	7
3.1	Schwerpunktthema: Modellieren.....	8
3.2	Modellieren im Bereich Messen	10
3.3	Modellieren im Bereich Messen in den VERA-8 Erhebungen.....	13
4	Die Leitidee Funktionaler Zusammenhang.....	16
4.1	Grundvorstellungen zu Funktionen	17
4.2	Schwerpunktthema: Graphen	19
4.3	Graphen in den VERA-8 Erhebungen	20
4.4	Darstellungswechsel mit digitalen Werkzeugen	26
5	Abschließende Anmerkungen.....	27
6	Literaturverzeichnis.....	28
7	Abbildungsverzeichnis	30
8	Tabellenverzeichnis	30
9	Verzeichnis der Beispielaufgaben.....	30

Autor*innen der fachdidaktischen Erläuterungen in Teil II sind Corinna Hankeln und Ilja Ay. Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus zehn Bundesländern und Fachdidaktiker*innen unter Federführung der Arbeitsgruppe Prof. Greefrath, Universität Münster (fachdidaktische Leitung) und des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.

Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?

www.igb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1 Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004, 2005, 2005b, 2015) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Daher wird in dieser didaktischen Handreichung zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt. Anschließend werden die beiden Schwerpunkte, die in den diesjährigen Ergänzungsmodulen zur Wahl stehen, näher erläutert: die Leitidee *Messen* mit Fokus auf der Kompetenz *Mathematisches Modellieren* sowie die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* mit Fokus auf das Thema Graphen. Dabei wird in beiden Abschnitten ein besonderes Augenmerk auf zentrale Aspekte der Schwerpunktsetzungen gelegt. Es werden fachdidaktische Herausforderungen geschildert und Beispiele vorgestellt, wie Lehrkräfte mit diesen in der Unterrichtspraxis umgehen können. Des Weiteren wird insbesondere bei Darstellungswechseln (zwischen Graphen und anderen Darstellungsformen) aufgezeigt, wie digitale Werkzeuge gewinnbringend in den Unterricht eingebunden werden können. In den dazugehörigen Kapiteln 3 und 4 werden außerdem Aufgaben aus VERA-8 vorgestellt, die sich den diesjährigen Schwerpunktsetzungen zuordnen lassen.

2 Bildungsstandards und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein. Eine grundlegende paradigmatische Wende stand bevor: Während zuvor der *Input* im Vordergrund stand, also Inhalte und Themen, sollte nun auch der *Output* stärkere Beachtung finden, also der Aufbau von Kompetenzen, Wissensstrukturen, Werten etc.. Inhalte sollten mit der Entwicklung von Persönlichkeitsmerkmalen verknüpft werden, die die Basis für ein lebenslanges Lernen legen und so persönliche Weiterentwicklung und gesellschaftliche Teilhabe ermöglichen (Klieme et al., 2003). Die OECD betont dabei den Anwendungscharakter von Mathematik:

„Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit des Einzelnen, Mathematik in einer Vielzahl von Kontexten zu formulieren, anzuwenden und zu interpretieren. Sie umfasst mathematisches Argumentieren und die Verwendung mathematischer Konzepte, Verfahren, Fakten und Werkzeuge zur Beschreibung, Erklärung und Vorhersage von Phänomenen. Sie hilft dem Einzelnen, die Rolle zu erkennen, die die Mathematik in der Welt spielt, und begründete Urteile und Entscheidungen zu treffen, die von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern benötigt werden.“ (OECD, 2013, S. 25, eigene Übersetzung)

Zu diesem Zweck benennen die Bildungsstandards Kompetenzen, die Schüler*innen bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe anhand zentraler Fachinhalte erworben haben sollen (KMK, 2004, 2005). Dabei wird davon ausgegangen, dass ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schüler*innen die folgenden drei *Grunderfahrungen* ermöglichen soll (Winter, 1995, S. 37):

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Bildungsstandards umfassen in ihrem Wesen die benannten Grunderfahrungen sowie Inhalte, Kompetenzen und Niveaustufen, wie das folgende Kompetenzmodell für das Fach Mathematik darlegt. Das Kompetenzmodell liefert eine *Orientierung* für Lehrpersonen und Schulen zur Einhaltung verbindlicher Ziele sowie zur Weiterentwicklung von Schule und Unterricht (Klieme et al., 2003). Orientierung bedeutet insbesondere, dass im Vordergrund nicht die Umsetzung eines – aus der fachlichen Systematik entstehenden – „starren Gerüsts“ steht, sondern dass Schulen ein großer „Freiraum für die innerschulische Lernplanung“ (ebd., S. 9) gelassen wird. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe Abbildung 1):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Leitideen*
3. *Anforderungsbereiche*

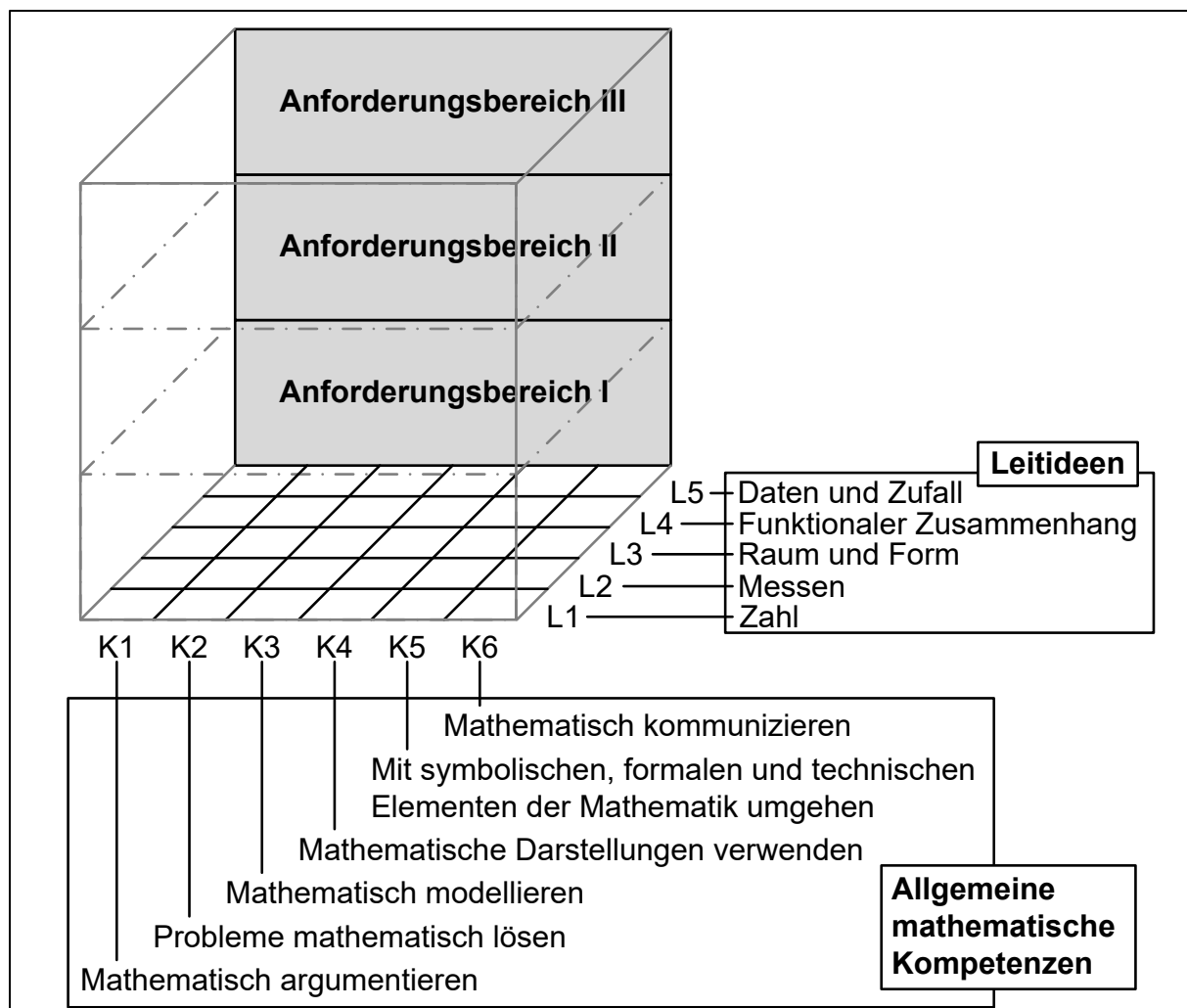


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells. Dabei wird vom Grundgedanken ausgegangen, „das Können der Schüler an den Kompetenzen festzumachen, die sie beim Bearbeiten von Aufgaben zu aktivieren haben“ (Leiss & Blum, 2010, S. 33). Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *mathematisch modellieren* (K3), *mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *mathematisch kommunizieren* (K6). Diese allgemeinen mathematischen Kompetenzen sollen differenziert betrachtet werden, auch wenn sie üblicherweise im Verbund erworben werden und häufig auch gemeinsam angewendet werden müssen. Insbesondere werden bei der Bearbeitung von komplexeren mathematischen Aufgaben oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt. Mit der getrennten Betrachtung ist die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen, was eine differenziertere Planung des Mathematikunterrichts ermöglicht. So kann ein mathematischer Inhalt den Schüler*innen entlang verschiedener durchzuführender mathematischer Tätigkeiten zugänglich gemacht

werden. Inhalte können durch die multiperspektivische und wiederholte Betrachtung eher in ihrer Gänze verstanden werden und mathematische Kompetenzen anhand unterschiedlichster Erscheinungen über den Inhalt hinaus erworben werden.

Jedoch reicht der Blick auf die allgemeinen mathematischen Kompetenzen für eine produktive Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht aus (Leiss & Blum, 2010, S. 35). Daher bilden die *Leitideen* die zweite Dimension des Modells. Die fünf Leitideen sind *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). Die fünf Leitideen ergeben sich vom Prinzip her, wenn Phänomene aus der Welt mit mathematischen Augen betrachtet werden (ebd., S. 20). In den Bildungsstandards wird dazu erläutert:

„Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2004, S. 9).

Leitideen folgen keinem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“). Sie erlauben es, bestimmte mathematische Inhalte unter einer Kategorie zusammenzufassen. Leitideen können als fundamentale Ideen aufgefasst werden (vgl. Schwill, 1993), die im Mathematikunterricht auf jedem intellektuellen Niveau vermittelt werden können.

Die dritte und letzte Dimension enthält die drei *Anforderungsbereiche*. Sie beschreiben das Schwierigkeitsniveau von Aufgaben, denn das Bearbeiten und Lösen von Aufgaben fordert mathematische Kompetenzen in unterschiedlichen Ausmaßen (KMK, 2004). Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem *Anforderungsbereich I* werden Anforderungen an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum *Reproduzieren* unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum *Anforderungsbereich II* zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schüler*innen ermöglichen, *Zusammenhänge herzustellen* und Gelerntes anzuwenden. In den *Anforderungsbereich III* gehören diejenigen Anforderungen, die es Schüler*innen abverlangen zu *verallgemeinern und zu reflektieren* (ebd.).

Die drei Bestandteile des Kompetenzmodells stellen gleichwertige Dimensionen der Bildungsstandards dar. Im Folgenden werden exemplarisch ein Aspekt der Leitidee *Messen* sowie ein Aspekt der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* herausgegriffen und erläutert. Eine Orientierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinen mathematischen Kompetenzen – also der Prozessdimension des Kompetenzmodells – ist eine maßgebliche Errungenschaft der Bildungsstandards, die auch bei exemplarischer Betrachtung einzelner Leitideen nicht in den Hintergrund geraten sollte.

3 Die Leitidee *Messen*

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss werden unter der Leitidee *Messen* die folgenden inhaltsbezogenen Kompetenzen zusammengefasst (KMK, 2004):

*Die Schüler*innen*

- *nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-, Flächen- und Volumenmessung, auch in Naturwissenschaften und in anderen Bereichen,*
- *wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel),*
- *schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten,*
- *berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren,*
- *berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel sowie daraus zusammengesetzten Körpern,*
- *berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen, auch unter Nutzung von trigonometrischen Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen,*
- *nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.*

In den Bildungsstandards Mathematik für den Hauptschulabschluss (KMK, 2005) finden sich viele der genannten Aspekte wieder. Dabei werden jedoch einige Einschränkungen vorgenommen. Es entfallen Volumen- und Oberflächenbestimmung von Kegel und Kugel, sowie die Bestimmung von Streckenlängen und Winkelgrößen auch unter Nutzung der Trigonometrie. In beiden Varianten der Bildungsstandards wird im Bereich *Messen* der Umweltbezug besonders hervorgehoben, sei es bei der situationsangemessenen Auswahl von Einheiten, der Größenschätzung, dem Entnehmen von Maßangaben aus Quellenmaterial oder dem Bewerten von Ergebnissen im Kontext einer Sachsituation.

Dass gerade dieser Bezug zu realen Objekten in der Leitidee eine besondere Stellung einnimmt, liegt auch an der grundlegenden Definition des Messens. Im Allgemeinen geht es beim Messen darum, quantitative Aussagen über bestimmte Eigenschaften eines Objektes zu treffen. Demnach wird die Welt der uns umgebenden Phänomene – der Gegenstände, Vorgänge und Zustände – durch das Messen in die strukturierte Welt der Zahlen übertragbar (Vohns, 2012). Um eine solche Eigenschaft genauer zu erfassen – etwa um verschiedene reale Objekte hinsichtlich dieser Eigenschaft zu vergleichen – macht man sich mathematische Größen (Länge, Masse, Zeit, Geldbetrag, Fläche, usw.) zunutze (Greefrath, 2010). *Messen* zu erlernen meint also stets auch das Kennen- und Anwenden-Lernen unterschiedlicher Größen. Dabei sind Größen nicht als natürliche Eigenschaft eines Objektes zu verstehen, sondern vielmehr als die Möglichkeit, den Objekten der Wirklichkeit in verschiedener Weise, z.B.

hinsichtlich ihres Volumens oder ihrer Masse, einen abstrakten Wert der Mathematik zuzuordnen, der sich ähnlich wie eine Zahl verhält (Barzel & Leuders, 2014). Messgrößen sind dabei im Allgemeinen aus einer Maßzahl und einer standardisierten Maßeinheit wie etwa Meter, Liter oder Quadratmeter zusammengesetzt.

Eine grundsätzliche Vorgehensweise für die zahlenmäßige Erfassung einer Eigenschaft eines Objektes ist es, sich ein passendes Vergleichsobjekt mit bekannter Maßeinheit zu wählen und mit dem Objekt zu vergleichen. Dieses Prinzip des Messens greift auf die Grundvorstellung des „Passen in“ zurück (Barzel & Leuders, 2014). Wenn beispielsweise die Maße einer Schreibtischplatte ermittelt werden sollen, kann man sich fragen, wie oft ein Vergleichsobjekt bekannter Größe (etwa ein DIN A4-Blatt) in die Länge bzw. Breite des Schreibtisches passt. Messen kann demnach als Auslegen einer Maßeinheit verstanden werden.

Daher spielt beim *Messen* oft auch das Schätzen von Größenangaben eine wichtige Rolle, insbesondere zur Überprüfung der Plausibilität gefundener Resultate – oder bei so genannten *unterbestimmten Aufgaben*, bei denen gewisse Angaben nicht dem Aufgabentext zu entnehmen sind. Um im Laufe der Schulzeit geeignete Vorstellungen zu Messgrößen zu entwickeln, ist der Aufbau von Stützpunktvorstellungen von großer Bedeutung. Mögliche Repräsentanten bezüglich des Stützpunktwissens zur Größe Volumen sind beispielsweise das Fassungsvermögen einer Badewanne (ca. 140 l) oder eines üblichen Putzeimers (ca. 10 l). Für eine Vorstellung von Flächeninhalten kann beispielsweise das Wissen über die Größe einer Seitentafel (1 m^2) oder eines Fußballfeldes (ca. $105\text{ m} \cdot 68\text{ m} \approx 7000\text{ m}^2$) dienen.

3.1 Schwerpunktthema: *Modellieren*

Insbesondere bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben sind das Schätzen sowie der Rückgriff auf verfügbares Stützpunktwissen in verschiedenen Teilprozessen unerlässlich. *Modellieren* meint das Erfassen von Phänomenen der realen Welt mithilfe der Mathematik und ist Teil der sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K1 – K6) der Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Modellierungsaufgaben zeichnen sich nicht nur durch ihren zwingend vorhandenen Realitätsbezug aus, sondern auch durch eine Vielzahl von Teilschritten, die zu ihrer Lösung ausgeführt werden müssen (Kaiser et al., 2015). Eine schematische Darstellung eines Modellierungsprozesses stellt der vierschrittige Kreislauf nach Maaß (2004) in Abbildung 2 dar.

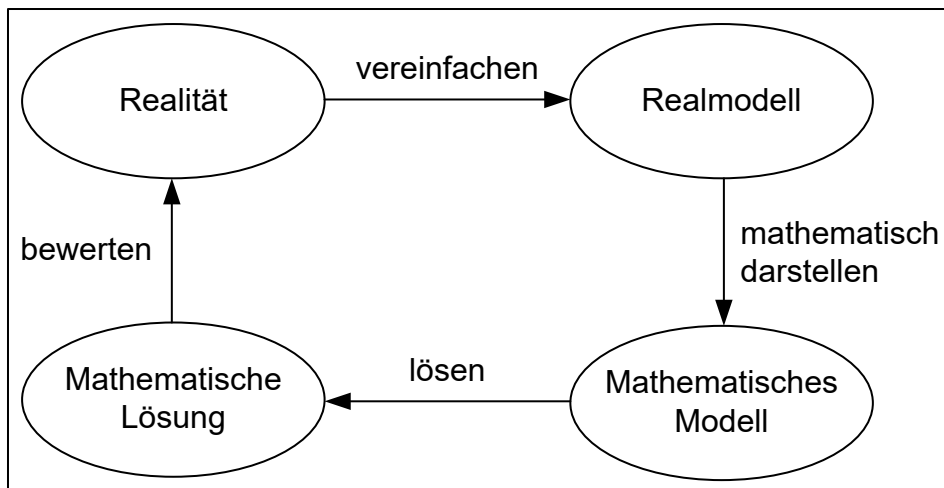


Abbildung 2: Modellierungskreislauf nach Maaß (2004)

Der Kreislauf beginnt oben links damit, dass Schüler*innen zunächst die gegebene realweltliche Situation verstehen und erkennen, worin das zu lösende Problem genau besteht. Da die Situation in der Realität in der Regel zu komplex ist, um sie vollständig bei der Lösung zu berücksichtigen, muss sie in einem ersten Schritt vereinfacht werden (Kaiser et al., 2015). Dazu ist es nicht nur erforderlich, Texte zu erfassen, sondern auch Kreativität und Allgemeinwissen sind gefordert, um zu entscheiden, welche Annahmen und Vernachlässigungen sinnvoll sind. Durch diesen ersten Schritt entsteht eine vereinfachte Abbildung der Realsituation, das so genannte Realmodell. Dieses Realmodell kann im zweiten Schritt mathematisiert, d. h. in die Sprache der Mathematik übersetzt werden. Übersetzen meint in diesem Fall das Darstellen notwendiger Elemente der Realsituation durch mathematische Objekte. Diese Objekte können je nach Problemverständnis ganz unterschiedlicher Art sein, etwa Formeln, Terme, Gleichungen oder auch geometrische Figuren. Mithilfe der gewählten Objekte kann dann unter Rückgriff auf formale mathematische Operationen gearbeitet und die Aufgabe gelöst werden. „Gelöst“ meint aber nicht zwingend, dass die Bearbeitung der Modellierungsaufgabe mit dem Finden eines mathematischen Ergebnisses oder dem Notieren eines Antwortsatzes beendet ist. Elementarer Bestandteil der Kompetenz des *Modellierens* ist das kritische Hinterfragen eines gefundenen Ergebnisses – zumal es bei Modellierungsaufgaben bisweilen nicht nur ein richtiges Ergebnis gibt, da es von den zuvor getroffenen Entscheidungen abhängen kann. Die Reflexion kann sich auf unterschiedliche Aspekte beziehen. So müssen Schüler*innen darauf achten, dass sie eine geeignete Einheit verwendet haben, Plausibilitätsüberlegungen durch Überschlagsrechnungen oder Vergleiche mit bekannten Größen anstellen, oder aber die gewählten mathematischen Objekte überdenken. Dies kann auch zum Verwerfen der bisherigen Lösung und zu einem erneuten Durchlauf des Kreislaufs führen, wenn die Lernenden feststellen, dass ein Ergebnis nicht exakt genug ist, oder ein Modell zu grob oder gar falsch gewesen ist. Ziel der Modellierung ist es, eine adäquate Antwort auf die

Fragestellung innerhalb des realen Kontextes zu finden. Dabei geht es nicht ausschließlich darum, überhaupt eine Antwort zu finden, sondern darum, die Modellierung so oft zu verbessern, bis das Ergebnis im realen Kontext plausibel und angemessen genau erscheint (Blum, 2007).

3.2 Modellieren im Bereich *Messen*

Es gibt viele Modellierungsaufgaben, die insbesondere Wissen über Inhalte aus dem Bereich *Messen* erfordern. Dies soll anhand einer Modellierungsaufgabe mit aktuellem Bezug veranschaulicht werden: Vor einiger Zeit brannte die Kathedrale Notre-Dame in Paris. Seitdem wurden einige Vorschläge gemacht, wie die Kirche wiederaufgebaut werden könnte.

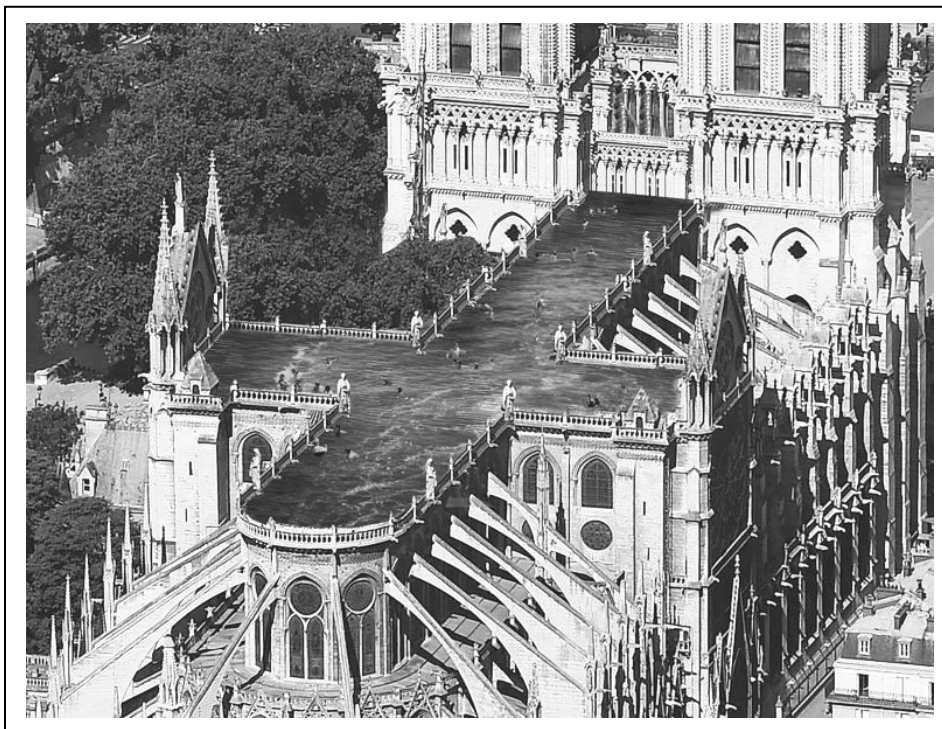


Abbildung 3: Modellierungsproblem Notre-Dame

Ein besonders innovativer Vorschlag stammt von dem schwedischen Architekturbüro UMA. Dieses schlug vor, das Dach der Kathedrale durch einen Swimming-Pool zu ersetzen¹. Abbildung 3 zeigt eine entsprechende Fotomontage des Architekturbüros. Aus diesem Bild können sich interessante Fragestellungen ergeben, etwa „Wie groß ist dieser Pool?“, oder auch (etwas schwieriger) „Wie viel Wasser fasst der Pool?“. Solche Fragestellungen können von der Lehrperson vorgegeben oder von der Lerngruppe entwickelt werden.

¹ Vgl. die Meldung der FAZ vom 14.06.2019 „Ein Schwimmbad auf dem Dach – Wiederaufbau der Notre-Dame“ (<https://www.faz.net/aktuell/gesellschaft/ungluecke/ausgefallene-ideen-fuer-den-wiederaufbau-der-notre-dame-16235199.html>)

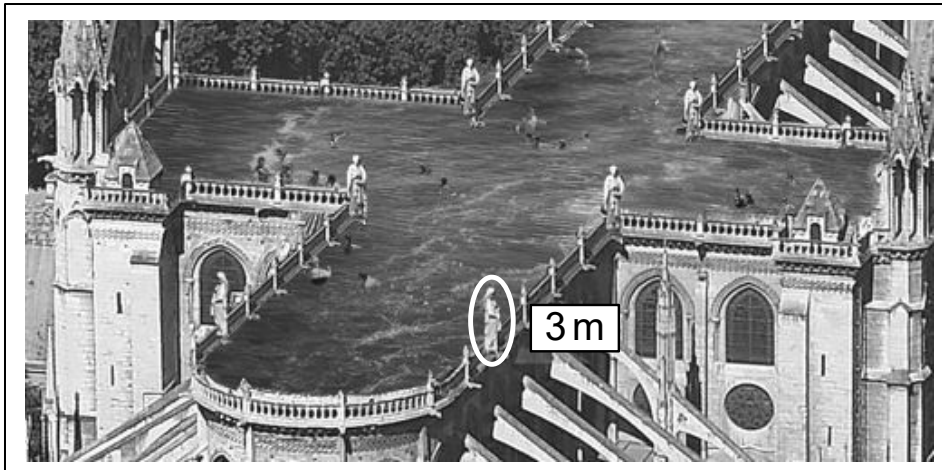


Abbildung 4: Modellierungsproblem Notre-Dame – Referenzgröße Statue

Mit Blick auf die Fläche des Pools soll nun also durch eine Modellrechnung ein Flächenmaß bestimmt werden. Dazu ist es zunächst nötig, bestimmte Annahmen zu treffen. In diesem Fall ist insbesondere die Entnahme bzw. das Schätzen von Größen zentral. Als Referenzgröße zum Abschätzen der Längen des Poolrandes können beispielsweise die Statuen am Rand genutzt werden. Diese sind etwa drei Meter groß (siehe Abbildung 4). Diese Information kann man entweder wissen, im Internet recherchieren oder durch Vergleich mit den im Pool befindlichen Personen ableiten. Da es nur um eine Abschätzung geht, sind die zentimetergenauen Maße nicht notwendig. Die Höhe der Statuen kann dann genutzt werden, um die Seitenlängen des Pools abzuschätzen. Nutzt man das mathematische Modell aus Abbildung 5, so lässt sich die Figur in drei Rechtecke, zwei davon gleich groß, sowie einen Halbkreis zerlegen.

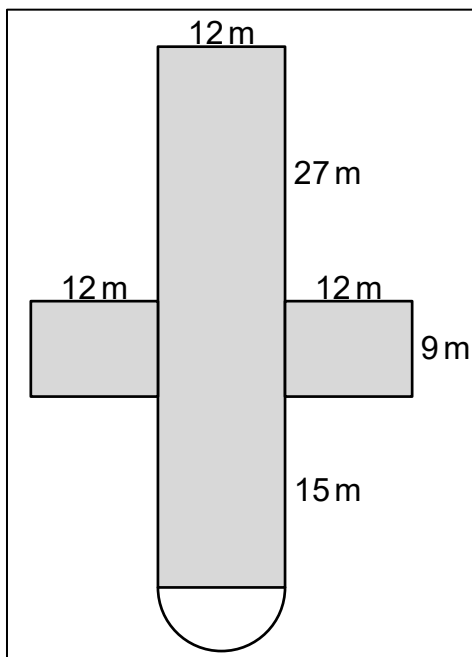


Abbildung 5: Modellierungsproblem Notre-Dame – Mathematisches Modell

Für die Gesamtfläche ergibt sich die folgende Gleichung:

$$12\text{ m} \cdot 27\text{ m} + 2 \cdot 12\text{ m} \cdot 9\text{ m} + 0,5 \cdot (6\text{ m})^2 \cdot \pi \approx 596,55\text{ m}^2$$

Die Poolfläche würde also ca. 600 m^2 betragen. Es stellt sich die Frage, ob dieses Ergebnis plausibel erscheint. Insgesamt verfügt die Notre-Dame über eine Grundfläche von 4800 m^2 . Die gesuchte Fläche entspricht also in etwa einem Achtel der Bodenfläche, dies erscheint auf den ersten Blick recht passend. Ein 50 m langes und 25 m breites Schwimmbecken, wie es beispielsweise bei olympischen Spielen benutzt wird, hat einen Flächeninhalt von 1250 m^2 und wäre also ungefähr doppelt so groß. Vergleicht man die gesuchte Fläche grafisch mit der Fläche eines Schwimmbeckens (siehe Abbildung 6), erscheint dieses Ergebnis plausibel.

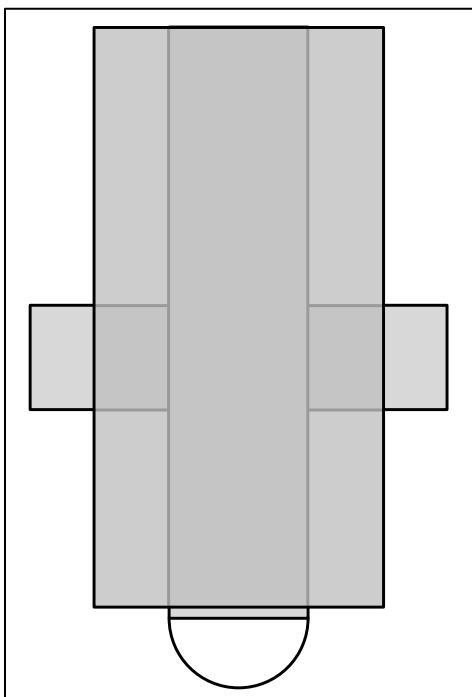


Abbildung 6: Modellierungsproblem Notre-Dame – Plausibilitätsprüfung

Diese Aufgabe stellt einige Anforderungen an die Schüler*innen und ist insbesondere durch die fehlenden Maßangaben sehr offen. In Bezug auf ihre Offenheit lässt sich diese Aufgabe durchaus mit Fermi-Aufgaben vergleichen. Sie eignet sich für den unterrichtlichen Einsatz, da mit ihr verdeutlicht werden kann, wie sich mathematische Größen aus realen Gegebenheiten ableiten lassen. Sie birgt aber aufgrund ihrer deutlichen Offenheit Schwierigkeiten für standardisierte Erhebungen wie etwa VERA-8, insbesondere in Bezug auf die Eingrenzung eines realistischen Lösungsintervalls, um eine verlässliche Kodierung sicherzustellen. Wie zur Kompetenzmessung im Bereich *Modellieren* geeignete Aufgaben aussehen können, illustriert der folgende Abschnitt.

3.3 Modellieren im Bereich Messen in den VERA-8 Erhebungen

Die oben erläuterten Fähigkeiten im Bereich des *Modellierens* innerhalb der Leitidee *Messen* werden auch in den VERA-8 Erhebungen geprüft. Dies wird im Folgenden anhand der beiden Aufgaben „Rollrasen“ und „Krawatte“ erläutert.

Die Aufgabe „Rollrasen“ (siehe Beispielaufgabe 1), die dem *Anforderungsbereich II* zuzuordnen ist, thematisiert die Modellierung einer mit Rollrasen zu versehenen Fläche:

Beispielaufgabe 1: „Rollrasen“

Herr Klie hat eine Gartenbaufirma und gestaltet einen Teil seines Firmengeländes in eine Rasenfläche um. Diese neue Rasenfläche ist 11 m lang und 10,5 m breit.

Aus Zeitgründen verwendet Herr Klie Rollrasen (siehe Fotos 1 und 2). Als Rollrasen bezeichnet man fertigen Rasen, der in rechteckige Stücke geschnitten und dann zum Transport aufgerollt wird.



Foto 1



Foto 2

Ein Streifen Rollrasen ist 0,6 m breit, 0,03 m dick und 2 m lang.

Ermittle, wie viele Streifen Herr Klie benötigt, um die gesamte Rasenfläche mit Rollrasen auszulegen. Reststücke eines Streifens werden weiterverarbeitet.

Bei dieser Aufgabe spielen Flächenberechnungen in einem realen Kontext eine Rolle. Es sind Eigenschaften realer Objekte (hier: des Rollrasens und der Gesamtfläche) in Form der Größe *Länge* angegeben. Damit unterscheidet sich diese Aufgabe in Bezug auf ihre Offenheit von der obigen Notre-Dame-Aufgabe. Dies hat den Vorteil, dass ein weniger breites Lösungsintervall bestimmt werden kann und so die Aufgabe leichter zu bewerten ist. Anhand der gegebenen Maße müssen ein Maß für den Flächeninhalt eines Streifens sowie die Anzahl der benötigten Streifen bestimmt werden. Daraus resultiert die Zuordnung zur Leitidee *Messen*. Zunächst müssen dem Aufgabentext die wichtigen Informationen entnommen werden (*Mathematisch Kommunizieren* K6). Es muss weiterhin ein Weg gefunden werden, wie die Anzahl der Streifen mathematisch ermittelt werden kann (*Probleme mathematisch lösen* K2, *Mathematisch Modellieren* K3). Beispielsweise kann die Größe der auszulegenden Fläche

berechnet und durch die Größe eines Rollrasenstreifens dividiert werden, da auch mögliche Reststücke weiterverarbeitet werden können. Eine weitere Teilaufgabe der Rollrasen-Aufgabe lautet wie folgt:

Beispielaufgabe 2: „Rollrasen“

Herr Klie transportiert mehrere Streifen Rollrasen in einer Schubkarre (siehe Foto 3).

Ermittle das Gewicht der sieben Rollen Rollrasen, die er pro Fuhre transportieren kann. Ein m^3 Rollrasen wiegt circa 900 kg.

_____ kg



Foto 3

In dieser Teilaufgabe können die einzelnen Streifen als Quader mit den Maßen $0,6\text{ m}$, 2 m und $0,03\text{ m}$ aufgefasst werden (*Mathematisch Modellieren K3*). Von diesen berechnet man jeweils das Volumen und das Gewicht. Anschließend wird das Ergebnis versiebenfacht. Beide Teilaufgaben gehören aufgrund der Anforderungen an das *Modellieren* und *Problemlösen* zu *Anforderungsbereich II*.

Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe können dann auftreten, wenn ein Rollrasenstreifen nicht als Quader modelliert, sondern als Rechteckfläche aufgefasst wird. Es würde somit der berechnete Flächeninhalt weiterverwendet werden, um das Gewicht eines Rollrasenstreifens zu bestimmen. Somit überprüft diese Aufgabe auch, ob Schüler*innen Vorstellungen zu verschiedenen Größen verknüpfen können. Sollten auf Seiten der Lernenden in diesem Fall Probleme auftreten, so könnte dies einer starken Orientierung am Kalkül geschuldet sein. Zur Bestimmung von Raum- und Flächeninhalten könnte verstärkt auf Anwendungsbeispiele aus der Realität gesetzt werden, um Vorstellungen von Größen mit realweltlichen Beispielen zu verbinden.

Bei der Aufgabe „Krawatte“ (siehe Beispielaufgabe 3) handelt es sich um eine Schätzaufgabe, zu deren Lösung die Höhe der Skulptur mithilfe geeigneter Annahmen geschätzt werden muss. Eine Möglichkeit besteht darin, die Körpergröße des Menschen (im rechten Bild) zu schätzen und anschließend auf die Länge der Riesenkrawatte zu übertragen. Anhand des linken Bildes ist zu erkennen, dass der Mann etwa drei- bis fünfmal so lang wie die Krawatte ist, die er trägt. Über dieses Verhältnis lässt sich dann die Körpergröße des ‚Riesenmenschen‘ ermitteln. Bei dieser Aufgabe müssen die Schüler*innen angemessen schätzen (*Mathematisch Modellieren K3*) und mit Verhältnissen und Faktoren korrekt umgehen (*Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen K5*).

Beispielaufgabe 3: „Krawatte“

Viele Bankangestellte tragen eine Krawatte (siehe Abbildung 1).



Abbildung 1



Abbildung 2

Abbildung 2 zeigt ein Kunstwerk im Bankenviertel von Frankfurt am Main. Es stellt eine Krawatte dar. Die Krawatte sieht aus, als ließe der Wind sie nach oben flattern. Wie groß wäre ein Mann ungefähr, der diese Riesenkrawatte trägt?

ungefähr m

Notiere deine Annahmen und deinen Lösungsweg.

Das Lösungsintervall ist relativ breit gewählt, damit im Erwartungshorizont verschiedene Schätzungen einbezogen werden können. So werden Körpergrößen zwischen 30 m und 70 m als richtig kodiert. Dabei muss der Lösungsweg zusätzlich eine angemessene Modellierung erkennen lassen, bei der mithilfe einer Vergleichsgröße und eines entsprechenden Faktors ein (impliziter) Bezug zur Länge der Skulptur hergestellt wird. Wünschenswert – im Sinne einer adäquateren Modellierung – wäre zudem, wenn in der Lösung der Knick in der Krawatte mitberücksichtigt würde. In der Testsituation ist dies jedoch nicht notwendig, da aus diagnostischer Sicht Schüler*innen die benötigten Kompetenzen auch bei Vernachlässigung des Knicks nachgewiesen haben.

4 Die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang*

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss werden unter der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* die folgenden, inhaltsbezogenen Kompetenzen zusammengefasst (KMK, 2004):

*Die Schüler*innen*

- *nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge,*
- *erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar,*
- *analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale),*
- *lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen,*
- *interpretieren lineare Gleichungssysteme graphisch,*
- *lösen Gleichungen und lineare Gleichungssysteme kalkülmäßig bzw. algorithmisch, auch unter Einsatz geeigneter Software, und vergleichen ggf. die Effektivität ihres Vorgehens mit anderen Lösungsverfahren (wie mit inhaltlichem Lösen oder Lösen durch systematisches Probieren),*
- *untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von linearen und quadratischen Gleichungen sowie linearen Gleichungssystemen und formulieren diesbezüglich Aussagen,*
- *bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen und stellen Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph her,*
- *wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an,*
- *verwenden die Sinusfunktion zur Beschreibung von periodischen Vorgängen,*
- *beschreiben Veränderungen von Größen mittels Funktionen, auch unter Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms,*
- *geben zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen an, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können.*

Auch in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss (KMK, 2005) finden sich die aufgeführten inhaltsbezogenen Kompetenzen wieder, wobei prozentualem Wachstum und Maßstäben in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss eine größere Bedeutung zugeschrieben wird. Insbesondere lineare Gleichungssysteme, quadratische Funktionen, Exponentialfunktionen sowie periodische Vorgänge sind in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss nicht aufgeführt. Da ebendiese inhaltsbezogenen Kompetenzen keinen Bestandteil der VERA-8 Erhebung darstellen, beinhalten die Bildungsstandards beider Abschlüsse für den Lernstand der Jahrgangsstufe 8 im Wesentlichen die gleichen inhaltsbezogenen Kompetenzen.

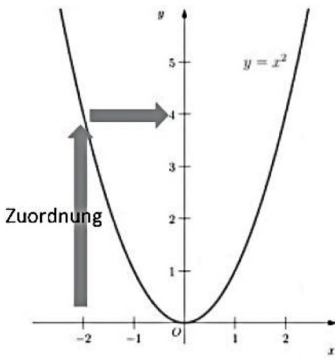
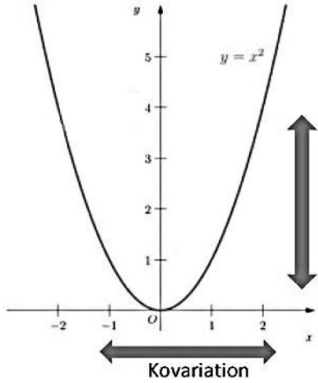
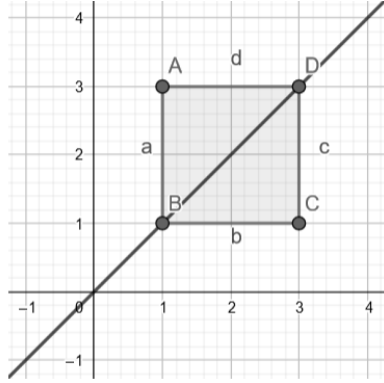
Funktionale Zusammenhänge sind allgegenwärtig, z. B. die Entfernung beim Busfahren, die in einer bestimmten Zeit zurückgelegt wird, oder der Einkaufspreis beim Bäcker in Abhängigkeit

von der Anzahl der Brötchen. Immer dann, wenn „eine Größe von einer anderen Größe abhängt“ (Greefrath et al., 2016, S. 36), kommen wir auf natürliche Weise in Kontakt damit. Bereits in der Grundschule werden erste funktionale Denkweisen vermittelt (Vollrath, 1989). Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2005b) beschreiben in dieser Hinsicht die Leitidee *Muster und Strukturen*, an die sich in der Sekundarstufe I unter anderem die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* anschließt. In der Primarstufe stehen unter anderem die Fähigkeiten im Fokus, funktionale Beziehungen in Sachsituationen zu erkennen, sprachlich zu beschreiben und in Tabellen darzustellen. In der Sekundarstufe I werden daran anknüpfend das kartesische Koordinatensystem und Variablen eingeführt und funktionale Zusammenhänge auch mithilfe von Termen und Funktionsgraphen dargestellt. Eine besondere Bedeutung wird der Verwendung von und dem Wechsel zwischen verbal-situativen, tabellarischen, graphischen und algebraischen Darstellungsformen beigemessen. Dies wird im Folgenden als Schwerpunkt behandelt. Dazu werden zunächst unterschiedliche Grundvorstellungen zu Funktionen erläutert, um darauf aufbauend das Schwerpunktthema dieses Kapitels *Graphen* im Rahmen von Darstellungsformen und Darstellungswechseln aus theoretischer Perspektive sowie anhand von Aufgaben aus der VERA-8 Erhebung zu präsentieren.

4.1 Grundvorstellungen zu Funktionen

Funktionale Zusammenhänge können auf unterschiedliche Weise dargestellt werden (tabellarisch, graphisch, algebraisch und sprachlich, vgl. Tabelle 1). Je nachdem welche Darstellungsform gewählt wird, stehen unterschiedliche inhaltliche Deutungen des Begriffs *Funktion* im Vordergrund. Bewusste Wechsel zwischen den Darstellungsformen können Schüler*innen dabei helfen, den Begriff *Funktion* mit Sinn zu versehen. Ziel ist es, dass die Schüler*innen tragfähige, inhaltliche Deutungen eines Begriffes, sogenannte *Grundvorstellungen* aufbauen (u. a. Greefrath et al., 2016; Rolfes, 2018; Vollrath, 1989; vom Hofe & Blum, 2016). Im Bereich der Funktionen werden in der Literatur häufig die Zuordnungsvorstellung, die Kovariationsvorstellung und die Objektvorstellung unterschieden (siehe Tabelle 1).

Tabelle 1: Grundvorstellungen von Funktionen

Zuordnung	Kovariation	Objekt																				
Eine Funktion beschreibt die Zuordnung einzelner Werte.	Eine Funktion beschreibt, wie sich die Veränderung einer unabhängigen Größe auf eine abhängige Größe auswirkt.	Eine Funktion beschreibt ein eigenständiges Objekt mit bestimmten Eigenschaften.																				
<table><thead><tr><th>Anzahl</th><th>Preis</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>3,50 €</td></tr><tr><td>2</td><td>7,00 €</td></tr><tr><td>3</td><td>10,50 €</td></tr><tr><td>4</td><td>14,00 €</td></tr></tbody></table> 	Anzahl	Preis	1	3,50 €	2	7,00 €	3	10,50 €	4	14,00 €	<table><thead><tr><th>Anzahl</th><th>Preis</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>3,50 €</td></tr><tr><td>2</td><td>7,00 €</td></tr><tr><td>3</td><td>10,50 €</td></tr><tr><td>4</td><td>14,00 €</td></tr></tbody></table> 	Anzahl	Preis	1	3,50 €	2	7,00 €	3	10,50 €	4	14,00 €	$f(x) = 5x + 3$ $f(x)$ ist monoton steigend $f(x)$ ist eine lineare Funktion Abgebildet ist ein Quadrat, das durch eine Gerade in zwei kongruente Dreiecke geteilt wird. 
Anzahl	Preis																					
1	3,50 €																					
2	7,00 €																					
3	10,50 €																					
4	14,00 €																					
Anzahl	Preis																					
1	3,50 €																					
2	7,00 €																					
3	10,50 €																					
4	14,00 €																					

Fasst man eine Funktion so auf, dass sie jedem Wert einer bestimmten Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zuordnet (z.B. einer Ware einen Preis, einem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit etc.), so legt man die Zuordnungsvorstellung zugrunde. Da in diesem Zusammenhang aber meist einzelne Zuordnungen betrachtet werden, ist die Sichtweise auf die Funktion eher punktuell und statisch (Laakmann, 2013). In Form einer Tabelle fokussiert man in dieser Perspektive vor allem die Gegenüberstellung der zugeordneten Werte. An einem Graphen innerhalb eines Koordinatensystems wird die Zuordnungsvorstellung z. B. dadurch gefördert, dass betont wird, dass ein Punkt auf dem Graphen aus der Kombination eines x - und eines y -Wertes entsteht. Im Gegensatz zu der eher statischen Sichtweise der Zuordnungsvorstellung fokussiert die Kovariationsvorstellung die gemeinsame Änderung zweier Größen (Laakmann, 2013, S. 84), etwa beim Zusammenhang „je mehr Brötchen man kauft, desto höher ist der Preis“. Untersucht werden hierbei nicht lokale Punkte, wie bei der Zuordnungsvorstellung, sondern „regionale“ Veränderungen. Die dritte Grundvorstellung ist die Objektvorstellung. Insbesondere in höheren Jahrgangsstufen der Sekundarstufe I wird eine Funktion auch als „ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes darstellt“ (Greefrath et al., 2016, S. 49) aufgefasst. Objekten können Eigenschaften zugeschrieben werden – bei Funktionen etwa Monotonie, Symmetrie und Proportionalität. Die Objektvorstellung steht auch dann im Vordergrund, wenn Funktionsterme vervielfacht oder Funktionsgraphen gespiegelt werden und so mit ihnen als Objekten operiert wird.

Die Grundvorstellungen von Funktionen können prinzipiell in allen benannten Darstellungsformen deutlich gemacht werden. Jedoch bieten sich einige Darstellungsformen zur Verdeutlichung gewisser Grundvorstellungen besonders an. Für ein Verständnis von Funktionen ist eine umfassende Auseinandersetzung mit den unterschiedlichen Darstellungsformen und damit auch den Grundvorstellungen nötig. Um mit unterschiedlichen Problemsituationen umgehen zu können, ist die Fähigkeit erforderlich, flexibel zwischen Darstellungsformen wechseln zu können. Da Schüler*innen gerade solche Wechsel Schwierigkeiten bereiten (Nitsch, 2015), sollten diese im Unterricht besonders intensiv betrachtet werden. Daher sind die Schwerpunkte der diesjährigen VERA-8 Erhebung der Umgang mit Darstellungsformen und der Wechsel zwischen ihnen mit Fokus auf *Graphen*.

4.2 Schwerpunktthema: *Graphen*

Zur Erlangung eines vertieften Verständnisses von funktionalen Zusammenhängen sind beim Darstellungswechsel sowohl die Darstellungsformen, zwischen denen gewechselt wird, als auch die Richtung des Wechsels von Bedeutung, da Darstellungswechsel richtungsabhängig sind. So konnte gezeigt werden, dass ein Darstellungswechsel von einer Gleichung zu einer graphischen Darstellung andere Fähigkeiten erfordert, als der umgekehrte Wechsel von einem Graphen zu einer Gleichung (Janvier, 1987). Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über Tätigkeiten beim Darstellungswechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen.

Tabelle 2: Beispiele für Tätigkeiten beim Darstellungswechsel zwischen Darstellungsformen

von \ nach	verbal / situativ	graphisch	tabellarisch	algebraisch
verbal / situativ	umformulieren	skizzieren	Werte finden	entnehmen, algebraisch ermitteln
graphisch	interpretieren	Achsenskalierung ändern	ablesen, eintragen	annähern, entnehmen, algebraisch ermitteln
tabellarisch	lesen, interpretieren	Punkte einzeichnen	weitere Werte ermitteln	annähern, entnehmen, algebraisch ermitteln
algebraisch	Formeln interpretieren (z. B. Bedeutung der Steigung m)	skizzieren, abtragen	berechnen	algebraisch umformen

Tabelle 2 macht deutlich, dass sogar Wechsel innerhalb einer Darstellungsform möglich sind. Beispielsweise ist der Wechsel zwischen einer graphischen Darstellungsform zu einer anderen sinnvoll, wenn Zwischenwerte besser erkennbar gemacht oder Prognosen über den Verlauf von Graphen angestellt werden sollen.

Diese – wie auch die anderen, beschriebenen – Tätigkeiten können dabei als Lernziele verstanden werden, die mit der Erlangung allgemeiner mathematischer Kompetenzen einhergehen können. Für einen Darstellungswechsel sind immer auch Kompetenzen erforderlich. Aufgaben zu *Funktionalen Zusammenhängen* (L4) und *Graphen* treffen im Wesentlichen den Kern der Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4). Hierzu gehören unter anderem:

- *verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden,*
- *Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen,*
- *unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln. (KMK, 2004, S. 8)*

Es wird unmittelbar ersichtlich, dass sich diese Kompetenzen in den Tätigkeiten beim Darstellungswechsel (siehe Tabelle 2) wiederfinden lassen. Dennoch können solche Aufgaben neben K4 (*Mathematische Darstellungen verwenden*) noch andere Kompetenzen (schwerpunktmäßig) beinhalten, wie die Kategorisierungen der einzelnen Aufgaben im Teil III der didaktischen Handreichungen und die folgenden Ausführungen zeigen.

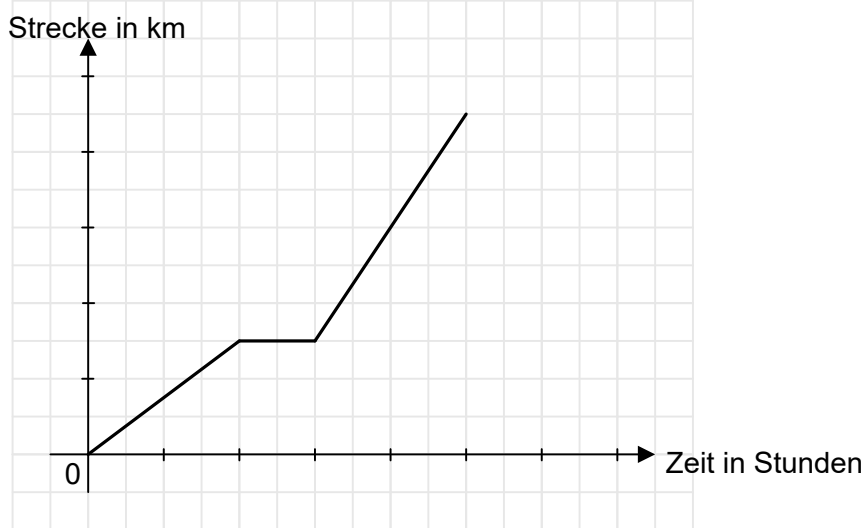
4.3 Graphen in den VERA-8 Erhebungen

Seit dem Jahr 2020 werden in den VERA-8 Erhebungen Schwerpunkte in Form von Ergänzungsmodulen gesetzt. Ziel ist es, vertiefende Diagnosen am Beispiel zentraler Inhalte zu ermöglichen und so Unterrichtsentwicklung nicht nur in der Breite, sondern auch in der Tiefe voranzutreiben. Dafür sei auch auf Teil III der didaktischen Handreichungen und die dazugehörigen Aufgabenkommentare verwiesen. Im Folgenden werden Aufgaben aus vergangenen VERA-8 Erhebungen dargestellt, die Tätigkeiten aus Tabelle 2 ansprechen. Dazu wird der Fokus der Analyse auch auf die dabei benötigten Kompetenzen gelegt. Somit kann aufgezeigt werden, inwiefern die Aufgabenformulierung beeinflusst, welche Kompetenzen in der Erhebung geprüft oder im Mathematikunterricht gefördert werden können.

Darstellungswechsel: verbal / situativ ↔ graphisch

In der Aufgabe Geschichte zur Graphik (siehe Beispielaufgabe 4) ordnen die Schüler*innen einem Graphen eine passende, verbale Situation zu (graphisch → verbal / situativ).

Beispielaufgabe 4: „Geschichte zur Grafik“



Eine der folgenden Beschreibungen wurde hier graphisch dargestellt.

Kreuze die Beschreibung an, die zu der Graphik passt.

- ☐ Paula und Sepp machen eine Bergtour. Zuerst steigt der Weg nur wenig an und die beiden kommen gut voran. Dann ist der Weg eine Zeit lang eben. Zum Schluss ist der Weg bis zum Gipfel ziemlich steil und Paula und Sepp kommen nur langsam voran.
- ☐ Herr Heuer kauft Aktien. Zuerst steigt der Wert der Aktien. Dann bleibt er eine Zeit lang konstant. Schließlich steigt der Wert steil an und Herr Heuer könnte die Aktien mit Gewinn verkaufen.
- ☐ Lisa und Sven machen eine Radtour. Nach einiger Zeit hat Sven eine Panne und sie müssen sein Rad reparieren. Für den Rest der Strecke fahren beide mit höherer Geschwindigkeit, um die versäumte Zeit aufzuholen.
- ☐ Lars ist auf dem Weg zur Schule. Unterwegs fällt ihm ein, dass er seinen Taschenrechner vergessen hat, den er für die Mathearbeit braucht. Er läuft zurück nach Hause, nimmt den Taschenrechner und muss sich jetzt beeilen, um pünktlich zur Schule zu kommen.

Neben der Verwendung einer *mathematischen Darstellung* (K4) kommt in dieser Aufgabe die Kompetenz *Kommunizieren* (K6) zum Tragen, denn mathematikhaltige Grafiken und Texte müssen sinnentnehmend erfasst und in Bezug zueinander gesetzt werden. Außerdem wird hier *mathematisch modelliert* (K3), da eine Situation (Sven hat eine Panne und muss sein Rad reparieren) in mathematische Strukturen (der Graph verläuft parallel zur x-Achse) übersetzt werden muss. Zur vertieften Förderung der Kompetenz *Kommunizieren* (K6) könnten die

Schüler*innen im Unterricht dazu aufgefordert werden, zu einem gegebenen Graphen eine eigene Geschichte zu erzählen und die Geschichte anschließend von einer Mitschülerin bzw. einem Mitschüler zurückübersetzen zu lassen. Letzteres stellt eine Umkehrung der Tätigkeit dar (verbal / situativ → graphisch).

Darstellungswechsel: tabellarisch ↔ graphisch

Bei der Aufgabe „Vier lineare Funktionen“ (siehe Beispielaufgabe 5) entnehmen die Schüler*innen dem Graphen Informationen und tragen sie in die Tabelle ein (graphisch → tabellarisch).

Beispielaufgabe 5: „Vier lineare Funktionen“

Der Graph der folgenden Funktion setzt sich aus vier linearen Funktionen zusammen.



Ergänze die fehlenden Lücken in der Tabelle.

Abschnitt	$0 < x < 3$			$8 < x < 10$
Steigung			2	

Dabei entnehmen sie der Grafik nicht nur Punkte wie bei der Zuordnungsvorstellung, sondern Steigungen im Sinne der Kovariationsvorstellung. Vordergründig müssen die Schüler*innen die Beziehungen zwischen den beiden Darstellungsformen erkennen und zwischen ihnen wechseln können. Daher ist die Aufgabe der Kompetenz *mathematische Darstellungen verwenden* (K4) zuzuordnen. Auch die umgekehrte Tätigkeit (tabellarisch → graphisch) erfordert diese Kompetenz. Dazu kann die ausgefüllte Tabelle vorgegeben werden und die Schüler*innen zeichnen den entsprechenden Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem ein.

Darstellungswechsel: algebraisch $\leftrightarrow$ graphisch

Die Aufgabe „Gerade einzeichnen“ (siehe Beispielaufgabe 6) stellt eine Aufgabe einfachen Anforderungsniveaus dar, in der aus einer vertrauten, symbolischen Darstellung eine zeichnerische Darstellung angefertigt werden soll (algebraisch $\rightarrow$ graphisch), sodass hier im Wesentlichen die Kompetenz *mathematische Darstellungen verwenden* (K4) erforderlich ist.

Beispielaufgabe 6: „Gerade einzeichnen“

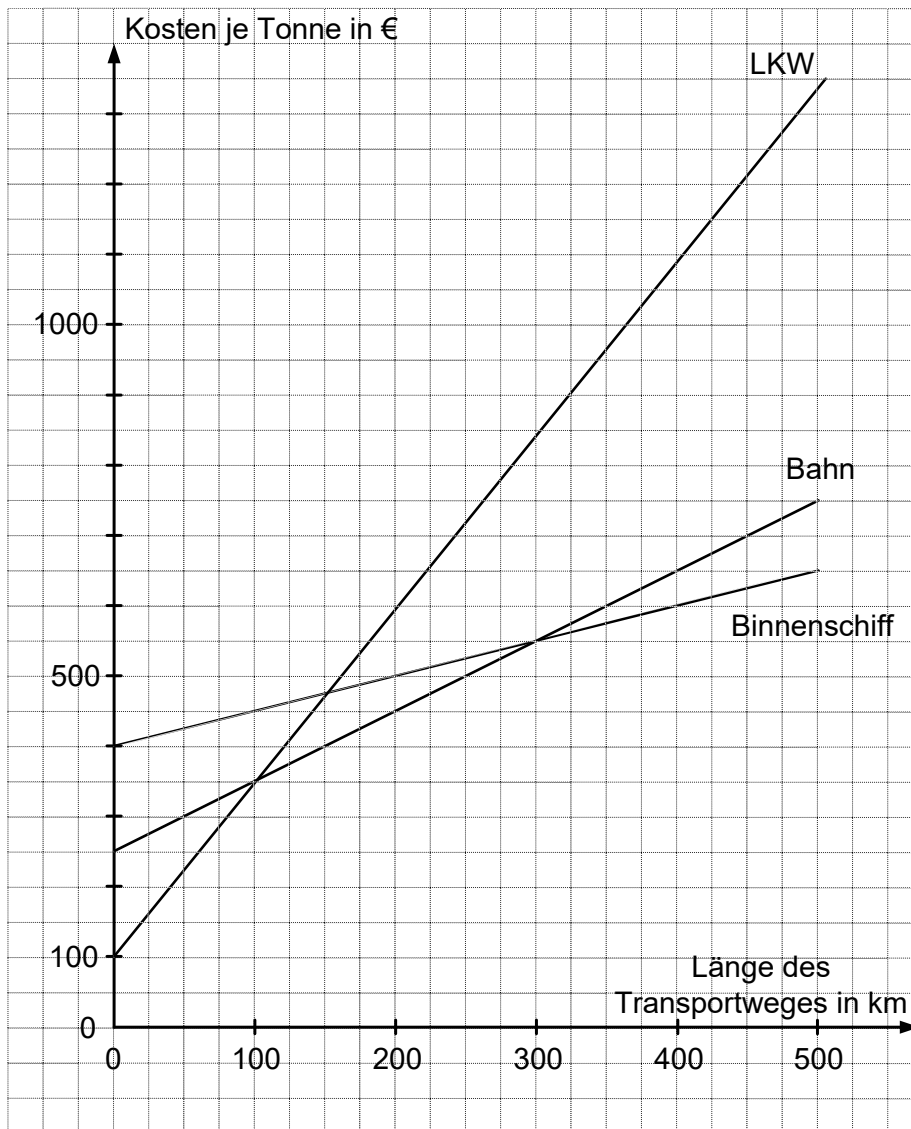
Zeichne eine Gerade mit der Gleichung $y=2x+1$ in das obige Koordinatensystem ein.

Bei der Aufgabe „Güterverkehr“ (siehe Beispielaufgabe 7) entnehmen die Schüler*innen dem Graphen und der verbalen Beschreibung Informationen, um eine Funktionsgleichung für einen der Graphen aufzustellen (graphisch $\rightarrow$ algebraisch).

Neben der *mathematischen Darstellung* (K4) gehen die Schüler*innen bei dieser Aufgabe *mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik um* (K5), da sie Faktenwissen darüber besitzen müssen, wie eine lineare Gleichung aufgebaut ist und die Fertigkeit besitzen müssen, eine Funktionsgleichung aus gegebenen Informationen aufzustellen. Zudem kann diese Aufgabe ein *Problem darstellen* (K2), da die Schüler*innen eigenständig geeignete Strategien und Hilfsmittel auswählen müssen. Die Schüler*innen könnten die Steigung formal mithilfe von zwei Punkten bestimmen oder aber anhand des Steigungsdreiecks visuell entnehmen. Hier wird ersichtlich, dass Aufgaben, in denen Darstellungswechsel vollzogen werden, mehr als zwei Darstellungsformen beinhalten können – hier etwa die verbale Beschreibung der Situation.

Beispielaufgabe 7: „Güterverkehr“

Die Abbildung stellt den Zusammenhang zwischen den Kosten einer transportierten Tonne Ware und der Länge des Transportweges für verschiedene Transportmittel dar. Die Graphen gehen auch für Transportwege über 500 km so weiter.



Gib eine Formel an, mit der sich die Kosten je Tonne (y in €) für den Transport mit einem LKW aus der Länge des Transportweges (x in km) berechnen lassen.

$y =$

Darstellungswechsel nicht vorgegeben

Insbesondere *Problemlöse-* (K2) und *Argumentationsaufgaben* (K1) lassen den Wechsel der Darstellungsform häufig unbenannt, da er einen Teil des Problemlöseprozesses bzw. der Begründung darstellt, wie die folgende Aufgabe darlegt.

Beispielaufgabe 8: „Punkte auf Geraden“

Gegeben sind die drei Punkte $P_1(2 | 1)$, $P_2(4 | 0)$ und $P_3(7 | -2)$.
Liegen alle drei Punkte auf einer Geraden?

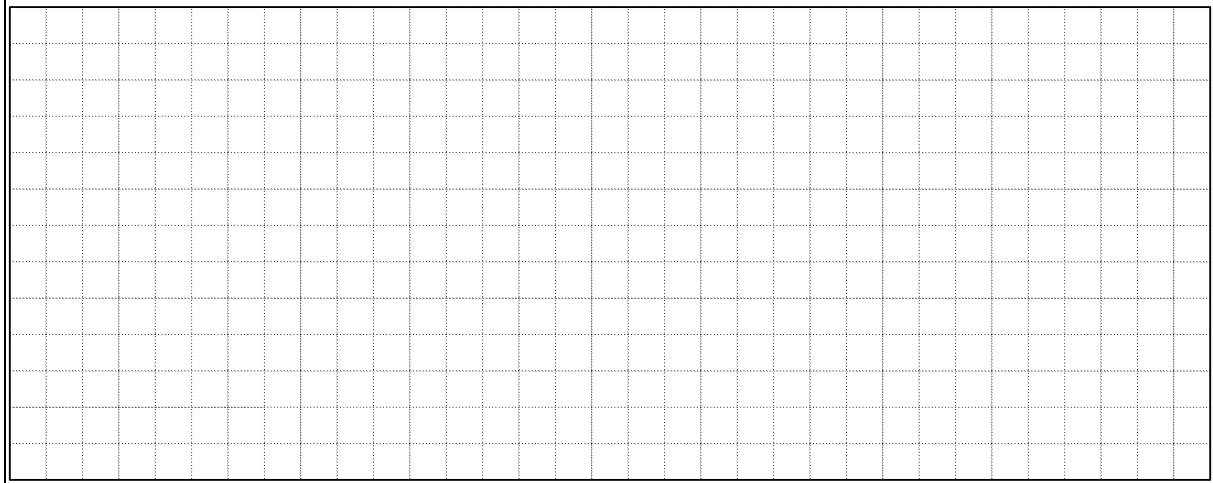
☐

Ja

☐

Nein

Begründe deine Antwort.



Die Aufgabe erfordert *mathematisches Argumentieren* (K1), denn in der Begründung des Lösungsweges soll der Zusammenhang zwischen zwei Darstellungen geprüft werden. Dadurch, dass die Darstellungsform zur Lösung der Aufgabe nicht vorgegeben ist und die Bearbeitung ein gewisses Repertoire an strategischen Hilfsmitteln erfordert, kann hier von einer *Problemlöseaufgabe* (K2) gesprochen werden. Die Schüler*innen können die Aufgabe lösen, indem sie algebraisch eine Geradengleichung mithilfe von zwei Punkten aufstellen und damit überprüfen, ob der dritte Punkt ebenfalls auf der Geraden liegt. Alternativ können die Punkte auch gedanklich oder in tabellarischer Form „abgeschritten“ werden (Kovariationsvorstellung). Es ist ebenfalls möglich, eine Gerade im Koordinatensystem anhand zweier Punkte zu zeichnen und grafisch zu prüfen, ob der dritte Punkt auf dieser Geraden liegt. Solche Aufgaben können Schüler*innen vor Hürden stellen, da der Lösungsweg durch die Aufgabenstellung nicht vorgegeben wird. Sie bieten aber auch die Chance eines ganzheitlichen Kompetenzerwerbs. Dazu bedarf es im Unterricht der Thematisierung verschiedener Lösungswege (*mathematisch Argumentieren* K1), auch wenn *ein* Ansatz hinreichend zur Lösung der Aufgabe wäre.

4.4 Darstellungswechsel mit digitalen Werkzeugen

Auch wenn Darstellungswechsel schwierig sind (Nitsch, 2015) und es für Schüler*innen vermutlich leichter ist, Aufgaben aus der Perspektive einer einzelnen Darstellungsform zu betrachten, sollen die Ausführungen unterstreichen, wie wichtig eine Vernetzung der Aspekte von Funktionen ist, damit im Rahmen von Problemsituationen auch komplexe funktionale Zusammenhänge erkannt werden können. Eine Möglichkeit, diese Aspekte funktionalen Denkens (Vollrath, 1989) zu vernetzen, stellen digitale Werkzeuge dar. Sie bieten den Vorteil, funktionale Zusammenhänge flexibel zu visualisieren, was mit händischen Mitteln nur schwer durchgeführt werden kann. Digitale Werkzeuge können – beispielsweise mittels Schieberegler (s. u.) – dabei helfen, Zusammenhänge zu entdecken und Ideen für Argumentationen und Problemlöseprozesse zu finden. Begriffe und deren Eigenschaften können erkundet und erklärt werden (Roth, 2008, 2017). Forschungsergebnisse konnten zeigen, dass im Rahmen funktionalen Denkens digitale Werkzeuge zu deutlich größeren Leistungszuwächsen führen als gegenständlich-materialbasierte Ansätze (Scheuring & Roth, 2017). Außerdem argumentieren Schüler*innen, die mit digitalen Werkzeugen arbeiten, häufiger mit Veränderungen im Sinne der Kovariationsvorstellung, während Schüler*innen, die enaktiv am Material arbeiten, häufiger mit Zuständen im Sinne der Zuordnungsvorstellung argumentieren (Roth, 2018). Um alle Grundvorstellungen zu fördern, sollte demnach sowohl mit gegenständlichen Materialien und als auch anhand von digitalen Werkzeugen gelernt werden (Roth, 2018).

Abbildung 7 zeigt, wie anhand von Schiebereglern in einer dynamischen Geometriesoftware Zusammenhänge erkundet werden können. Das linke Fenster der Abbildung 7 zeigt die Funktion in symbolischer, das mittlere in graphischer und das rechte in tabellarischer Darstellungsform. Alle drei Darstellungen werden bei einer Veränderung eines Parameters mittels Schieberegler dynamisch angepasst. Dabei können mit Blick auf die drei Grundvorstellungen Begriffe und Eigenschaften wie Konstante, Parameter, Verschiebung, Scheitelpunkt usw. thematisiert werden.

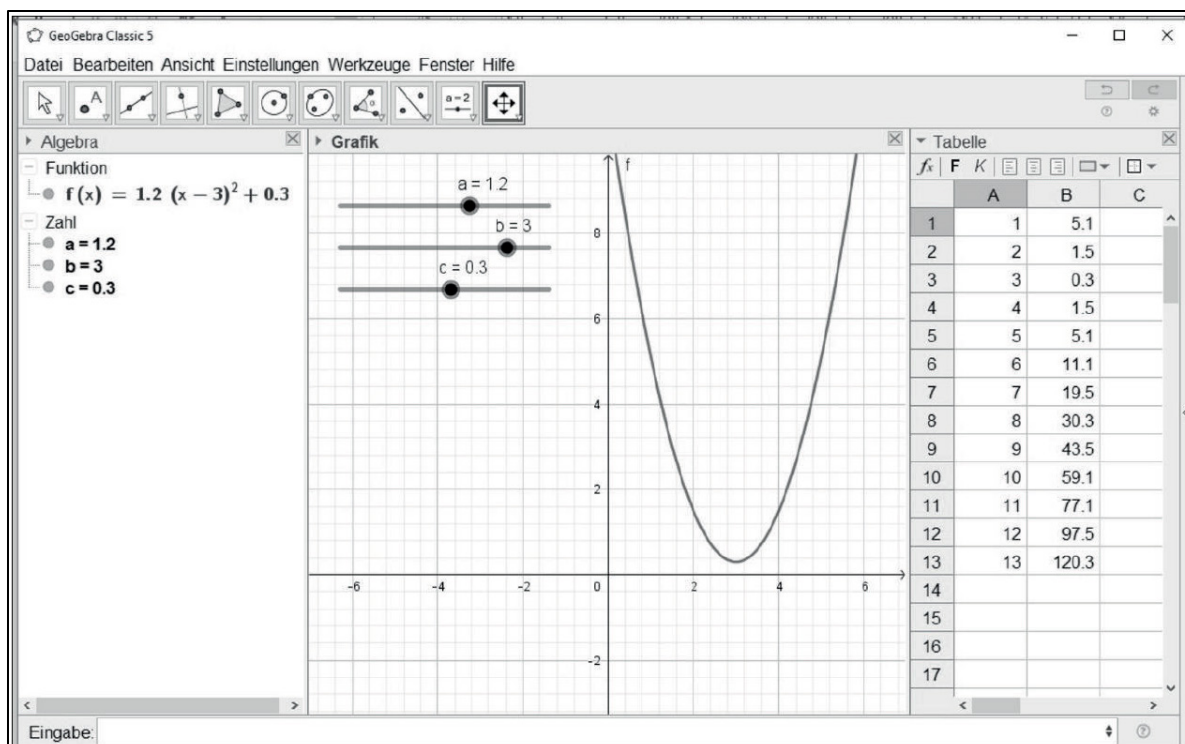


Abbildung 7: Zusammenhänge erkennen mithilfe eines Schiebereglers anhand verschiedener Darstellungsformen

5 Abschließende Anmerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalten erneut zwei Themenschwerpunkte aus zwei Leitideen, die als Ergänzungsmodule für die VERA-8 Testung zur Auswahl stehen. Im Bereich der Leitidee *Messen* ist dies der Schwerpunkt *Modellieren*, im Bereich der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* der Schwerpunkt *Graphen*. Aus beiden Themen wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Dabei wurde auf besondere Hürden und Möglichkeiten sowohl beim Thema *Modellieren* als auch im Themenfeld *Graphen* hingewiesen. Für weitere Anregungen für die Unterrichtspraxis sei auf die Kommentare zu den einzelnen Aufgaben in Teil III der didaktischen Handreichungen verwiesen. Zudem wurde aufgezeigt, welche Aufgabenmerkmale mit welchen allgemeinen mathematischen Kompetenzen einhergehen. Für weitere Beispiele und Anregungen stellt die in den vorangegangenen Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar.

6 Literaturverzeichnis

- Barzel, B. & Leuders, T. (2014). Größen und Maße. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik: Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II*. Klett Kallmeyer.
- Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren — Zu schwer für Schüler und Lehrer? In E. Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 3–12). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Blum, W., Drüke-Noé, C., Hartung, R. & Köller, O. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: Konkret — Sekundarstufe I*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Ulm, V. Siller, H.-S. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin: Springer Spektrum.
- Janvier, C. (1987). Translation process in mathematics education. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (S. 27–31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357–383). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E. & Vollmer, H. J. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. In BMBF (Hrsg.), *Bildungsreform: Bd. 1. Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: Eine Expertise* (S. 7–174). Berlin.
- KMK. Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Zugriff am 28.05.2021. Verfügbar unter <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>
- KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. München: Luchterhand.
- KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss vom 15.10.2004*. München, Neuwied: Luchterhand.
- KMK (2005b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München, Neuwied: Luchterhand.
- KMK (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (Beschluss vom 18.10.2012). Köln: Carl Link.
- Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung. Eine Untersuchung in rechnerunterstützten Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

- Leiss, D. & Blum, W. (2010). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 33–50). Berlin: Cornelsen.
- Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim u. a.: Franzbecker.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.
- Rolfes, T. (2018). *Funktionales Denken. Empirische Ergebnisse zum Einfluss von statistischen und dynamischen Repräsentationen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Roth, J. (2008). Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen. In U. Kortenkamp, H.-G. Weigand & T. Weth (Hrsg.), *Informatorische Ideen im Mathematikunterricht* (S. 131–138). Hildesheim: Franzbecker.
- Roth, J. (2017). Computer einsetzen: Wozu, wann, wer & wie? *Mathematik lehren*, 205, 35–38.
- Roth, J. (2018, Februar). *Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen erarbeiten*. Vortrag im Rahmen der DmW-Tagung, Karlsruhe. Zugriff am 14.05.2020. Verfügbar unter https://www.juergen-roth.de/vortraege/2018_Roth_Grundvorstellungen_zu_funktionalen_Zusammenhaengen_erarbeiten.pdf
- Scheuring, M. & Roth, J. (2017). Computer-Simulationen oder gegenständliche Materialien – Was fördert funktionales Denken besser? In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 837–840). Münster: WTM.
- Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 25(1), 20–31.
- Vohns, A. (2012). Grundprinzipien des Messens – Erkunden, Vernetzen, Reflektieren. *Mathematik lehren*, 173, 20–24.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10, 3–37.
- von Hofe, R. & Blum, W. (2016). „Grundvorstellungen“ as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematikdidaktik*, 37, 225–254.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 21(61), 37–46.

7 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: IQB in Anlehnung an KMK, 2015, S. 12	5
Abbildung 2: Maaß (2004, S. 57)	9
Abbildung 3: https://www.u-m-a.se/filter/Featured/NOTRE-DAME (letzter Zugriff: 30.03.2021)	10
Abbildung 4: https://www.u-m-a.se/filter/Featured/NOTRE-DAME (letzter Zugriff: 30.03.2021)	11
Abbildung 5: IQB	11
Abbildung 6: IQB	12
Abbildung 7: IQB	27

8 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: IQB	18
Tabelle 2: vgl. Laakmann (2013, S. 90)	19

9 Verzeichnis der Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1: „Rollrasen“	13
Beispielaufgabe 2: „Rollrasen“	14
Beispielaufgabe 3: „Krawatte“	15
Beispielaufgabe 4: „Geschichte zur Grafik“	21
Beispielaufgabe 5: „Vier lineare Funktionen“	22
Beispielaufgabe 6: „Gerade einzeichnen“	23
Beispielaufgabe 7: „Güterverkehr“	24
Beispielaufgabe 8: „Punkte auf Geraden“	25