

Die Leitidee *Muster und Strukturen*¹

Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein?

Muster und Strukturen sind als übergreifendes Prinzip das Fundament aller Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts und der Mathematik als Wissenschaft. Gegenstand des Mathematikunterrichts ist das Erkunden, das Entdecken, das Herstellen und das Nutzen von Mustern.

Das Denken in Mustern und Strukturen bedeutet eine entscheidende Steigerung der Denkökonomie. Je besser ein Kind Zahlen, Rechnungen, Formen, einzelne Wissens Elemente und Fertigkeiten vernetzen kann, desto geringer wird sein Gedächtnis belastet.

Der Kompetenzbereich *Muster und Strukturen* hat höchste praktische Relevanz und eröffnet somit zahlreiche anwendungsbezogene Übungsfelder. Er zeichnet sich durch Vernetzungen mit allen anderen Kompetenzbereichen aus: Es gibt Verbindungen zu *Zahlen und Operationen*, zu *Raum und Form*, zu *Größen und Messen* und zu *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*.

Bei der Diskussion von Mustern und Strukturen werden insbesondere die allgemeinen mathematischen Kompetenzen *Darstellen*, *Argumentieren* und *Kommunizieren* gefordert und gefördert.

In der kurzen Darstellung der Bildungsstandards umfasst die Leitidee *Muster und Strukturen* zwei wesentliche zusammenhängende Aspekte mit zahlreichen mathematischen Bezügen:

- Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen
- funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen²

Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen

Wie die Aufgabe in Abbildung 1 zeigt, umfasst dieser Bereich Aufgaben, die auf den ersten Blick auch dem Bereich Zahlen und Operationen zugeordnet werden könnten. Bei der abgebildeten Aufgabe geht es um das Beschreiben einer Felddarstellung mithilfe einer Multiplikation. Aber es geht an dieser Stelle um mehr: Gegeben ist ein geometrisches Muster. Dieses soll erkannt und mit dem arithmetischen Muster in Verbindung gesetzt werden. Eine Seite des Rechtecks bleibt gleich, die andere wächst fortlaufend um eine Kästchenlänge. In der Multiplikation zeigt sich dies durch den gleichbleibenden Faktor 2 und den zweiten Faktor, der fortlaufend um eins größer wird.

Schreibe die passenden Mal-Aufgaben auf. Achte auf das Muster.

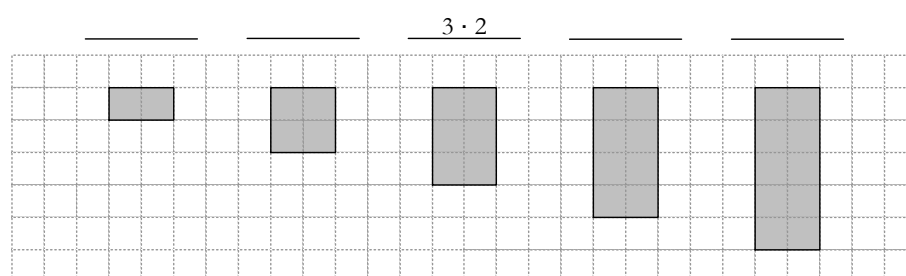


Abbildung 1. Aufgabe 2, VERA-3 Mathematik 2016

¹ Entnommen aus: Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Prof. Dr. Kristina Reiss und Dr. Heino Reimers): Vergleichsarbeiten 2024. 3. Jahrgangsstufe (VERA-3). Mathematik. DIDAKTISCHE HANDREICHUNG Teil II. Fachdidaktische Orientierung Muster und Strukturen. S. 10ff.

² siehe Kultusministerkonferenz 2005, S. 10-11 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>

Funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen

Ein weiterer Aspekt im Bereich Muster und Strukturen betrifft funktionale Beziehungen. Wird einer Zahl oder einer Größe nach einer festen Vorschrift eine zweite Zahl oder Größe zugeordnet, so ergeben sich Zahlenpaare, die oftmals ein Muster erkennen lassen. Ein funktionaler Zusammenhang, der in vielen Sachsituationen beim Modellieren auftritt, ist die Proportionalität. Weniger häufig zeigt sich indirekte Proportionalität, wie in der folgenden Aufgabe (Abbildung 2): Je mehr Elias an einem Tag strickt, desto schneller wird er fertig.

Elias strickt einen Schal. Er strickt jeden Tag ein gleich langes Stück.
Wenn er jeden Tag 16 cm strickt, ist der Schal in 10 Tagen fertig.

Wie viel müsste er jeden Tag stricken, damit er in 5 Tagen fertig wird?

_____ cm



Abbildung 2. Aufgabe 5, VERA-3 Mathematik 2016

Im Folgenden werden Beispiele zu den verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen dargelegt, an denen das übergreifende Prinzip von Mustern und Strukturen für den Mathematikunterricht verdeutlicht wird. Vor allem die enge Vernetzung zwischen Arithmetik und Geometrie wird daraus ersichtlich.

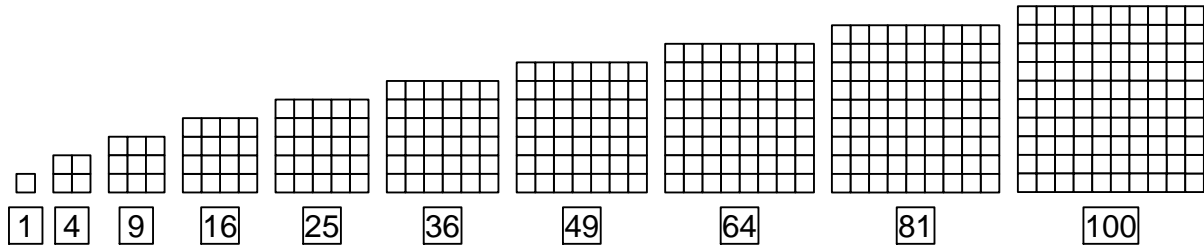
Muster in der Arithmetik

Muster und Strukturen sind grundlegend für das Zahlverständnis (z. B. Stellenwertsystem, mathematische Strukturen in Arbeitsmitteln) und das Verständnis der Rechenoperationen (z. B. Entwicklung von Grundvorstellungen zu Multiplikationsaufgaben, Zahlzerlegungen).

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □	0 + 10
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	1 + 9
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	2 + 8
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	3 + 7
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	4 + 6
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	5 + 5
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	6 + 4
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	7 + 3
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	8 + 2
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	9 + 1
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	10 + 0

Muster in der Geometrie

Das Beispiel Quadratzahlen zeigt den Bezug zwischen einer geometrischen Folge und einer arithmetischen Zahlenfolge.



Vertiefend können folgende Fragestellungen bearbeitet werden: Wie viel muss man zur ersten Quadratzahl addieren, um zur zweiten zu kommen? Wie viel fehlt von der zweiten zur dritten? ... Was fällt dir auf? Wie heißt die Quadratzahl von 11, von 12, ...?

Muster in der Kombinatorik

Muster und Strukturen in der Kombinatorik werden z. B. in Baumdiagrammen deutlich. Alle Möglichkeiten eines kombinatorischen Problems können so übersichtlich erfasst werden.

Beispiel:

Die Klasse 3a besucht eine Zirkusvorstellung. Max, Uli, Susanne und Gabriele sind enge Freunde und wollen nebeneinandersitzen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, sich nebeneinanderzusetzen?

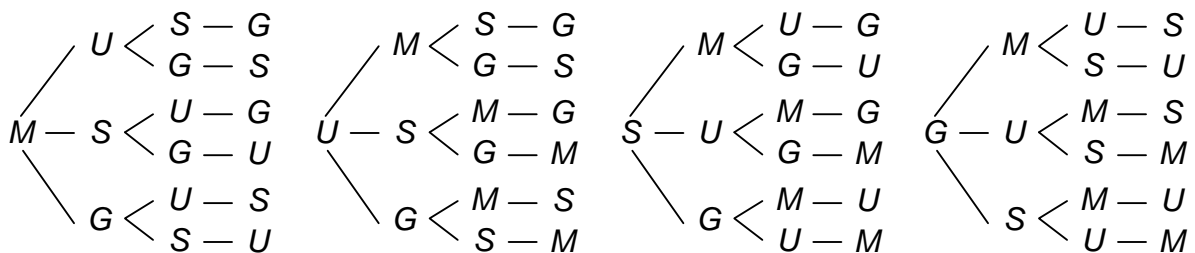
Es gibt _____ Möglichkeiten.

Max = M

Uli = U

Susanne = S

Gabriele = G



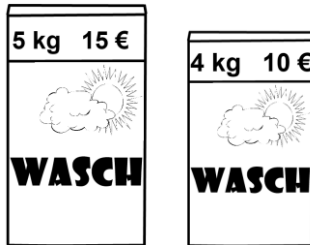
Muster in der sachbezogenen Mathematik

Wenn zwischen Größen und/oder Zahlen ein Rechenmuster besteht, mit dem man eine Größe und/oder Zahl aus der anderen bestimmen kann, so spricht man davon, dass Größen bzw. Zahlen in einem „funktionalen Zusammenhang“ stehen.

Mögliche Beispiele:

Proportionaler Zusammenhang von zwei Größen

Welches Waschmittel ist günstiger?



A

B

A

Gewicht in kg	5	1
Preis in €	15	3

B

Gewicht in kg	4	2	1
Preis in €	10	5	2,50

Funktionaler Zusammenhang von zwei Zahlen:

Bestimmen der Kantenlänge und des Rauminhalts von Würfeln (durch Auszählen von Einheitswürfeln).

Kantenlänge	2	3	4		
Rauminhalt	8	27	64		