

Die Leitidee *Raum und Form* ¹

Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein?

Die ersten geometrischen Kompetenzen entwickeln sich bei Kindern bereits ab der Geburt in der Interaktion mit ihrer Umgebung und durch eine vielfältige Wahrnehmung der Lebenswelt. Durch die Verarbeitung visueller Erfahrungen in Verbindung mit haptischen Reizen entstehen so z. B. Grundlagen für die Orientierung im Raum oder auch basale kognitive Fähigkeiten zur Klassifizierung von Objekten.

In der Schule sind diese Vorerfahrungen in vielen Bereichen Voraussetzung für gelingendes Lernen, so z. B. das sichere Erkennen von Raum-Lage-Beziehungen als Grundlage für das Lesen und Schreiben. Im Mathematikunterricht werden die vorhandenen geometrischen Fähigkeiten im Hinblick auf Objekte wie Flächen und Körper und darauf bezogene Prozesse – Bewegen (Abbildungen) – sowie das räumliche Vorstellungsvermögen allgemein anhand konkreter Handlungserfahrungen vertieft, systematisch geordnet, genutzt und spiralcurricular erweitert.

Übergreifend spielen dabei das Begriffsverständnis und das geometrische Zeichnen eine Rolle. Diese beiden Aspekte bedürfen, ebenso wie die in alle Bereiche hineinspielende Raumvorstellung, einer kontinuierlichen Förderung, die möglichst früh beginnen sollte.

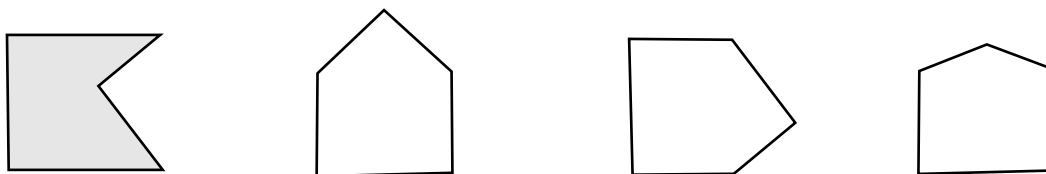
Raumvorstellung

Raumvorstellung umschreibt die Fähigkeit, „räumliche Objekte“ in Gedanken zu sehen und dabei mit den entstehenden Vorstellungsbildern aktiv umzugehen, etwa im Sinne einer mentalen Bewegung oder einer mentalen Vergrößerung bzw. Verkleinerung.

Mit „räumlichen Objekten“ assoziiert man dabei zumeist Objekte des dreidimensionalen Erfahrungsraumes, gemeint sind aber auch Objekte in einer Ebene oder in anderen „Räumen“, etwa auf einer Geraden oder auf einer Kugeloberfläche. In der Mathematik werden viele Objekte in „Räumen“ organisiert, etwa in „Zahlenräumen“, so dass der Begriff der Raumvorstellung dort eine umfassende Bedeutung erhält, der auch die Schulmathematik betrifft.

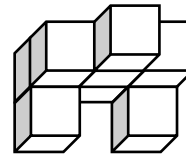
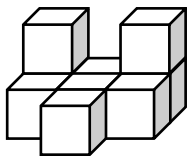
Diese Raumvorstellung ist bei den Schüler*innen i. d. R. sehr unterschiedlich ausgeprägt; so gelingt z. B. das gedankliche Lösen kopfgeometrischer Aufgaben über mentales Operieren in ganz unterschiedlichem Maße. Da aber auch viele geometrische Sachverhalte über die räumliche Vorstellung erworben werden, ist die Förderung dieses Kompetenzbereichs von besonderer Bedeutung.

So kann z. B. die Gewinnung der Anzahl der Ecken eines Quaders oder einer vierseitigen Pyramide durch Abzählen an einem imaginären Objekt erfolgen. Auch Lagebeziehungen können in Gedanken verändert werden. Dies ist bei folgender Aufgabe erforderlich. Dort muss ein passendes Teil identifiziert werden:

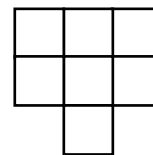
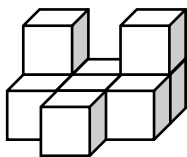


¹ Entnommen aus: Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Prof. Dr. Kristina Reiss und Dr. Heino Reimers): Vergleichsarbeiten 2024. 3. Jahrgangsstufe (VERA-3). Mathematik. DIDAKTISCHE HANDREICHUNG Teil II. Fachdidaktische Orientierung Raum und Form. S. 7ff.

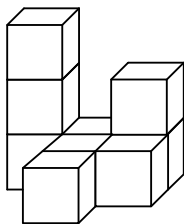
Die Fähigkeit, mental den Standort wechseln zu können, ermöglicht es, Bewegungen eines Körpers, hier eine Rotationsabbildung, als solche zu identifizieren:



Auch die Beziehung zwischen der dreidimensionalen Darstellung eines Objektes und der zweidimensionalen Ansicht von oben kann mithilfe des räumlichen Vorstellungsvermögens hergestellt werden:



Diese Fähigkeit wird unter anderem bei der Zuordnung des richtigen Bauplans zu einem Körper benötigt:



3	1	1
0	1	1
0	1	0

3	1	2
1	1	1
0	1	0

3	1	2
0	0	1
0	1	0

3	1	1
0	1	1
0	1	0

Begriffsverständnis

Um Mathematik zu verstehen und im Unterricht über mathematische Sachverhalte zu sprechen, bedarf es eines einheitlichen Begriffsverständnisses. „Begriff“ ist dabei nicht allein als formales Unterscheidungsmerkmal im Sinne einer Wort-Sachverhalt-Zuordnung zu sehen. Mathematische Begriffe müssen mit Grundvorstellungen verknüpft werden. Vollrath (1984) unterscheidet **fünf Stufen des Begriffsverständnisses**, von denen primär die ersten drei von Relevanz für die Grundschule sind:

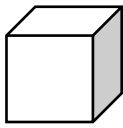
Intuitives Begriffsverständnis

Das Kind nimmt den Begriff als Phänomen in seiner Umwelt wahr. Dies ist die Grundlage für darauf aufbauende Begriffsbildungsprozesse. Im Unterricht ist daher der handelnde Erwerb von Erkenntnissen durch praktische Tätigkeiten wichtig, also das Anknüpfen an reale Erfahrungen aus der Umwelt.

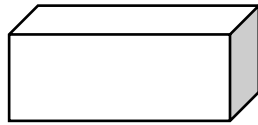
Inhaltliches Begriffsverständnis

Der Begriff wird mit Eigenschaften verbunden, die in unterschiedlichen Darstellungen oder Objekten zum selben Begriff vorhanden sind. So kann z. B. ein Würfel anhand des Wissens über seine Eigenschaften als solcher identifiziert werden, unabhängig von seiner Größe oder Lage. Besonders stark verankert ist solches Wissen, wenn es durch den Vergleich mehrerer ähnlicher Abbildungen eigenständig angewandt werden kann:

Was ist die Besonderheit von Figur 1 gegenüber Figur 2, 3 und 4?



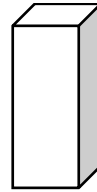
Figur 1



Figur 2



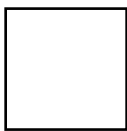
Figur 3



Figur 4

Integriertes Begriffsverständnis

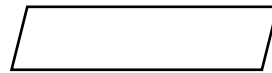
Der Begriff ist Teil eines Begriffsnetzes, innerhalb dessen Zusammenhänge erkannt werden können. Diese Fähigkeit findet in der Grundschule Anwendung, wenn Begriffshierarchien, wie bspw. die im Folgenden geschilderte, erkannt und begründet werden können:



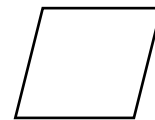
Ein Quadrat ist zugleich ...



... ein Rechteck,



... ein Parallelogramm,



... eine Raute.

Ein Rechteck ist zugleich ...

... ein Parallelogramm.

Für die Primarstufe von geringerer Bedeutung im Zusammenhang mit *Raum und Form* sind die Stufen 4 und 5:

Formales Begriffsverständnis

Dies erfordert die Kenntnis verschiedener Definitionen und die Befähigung zur Anwendung im Rahmen von Beweisen.

Strukturelles Begriffsverständnis

Dieses weit gehende Begriffsverständnis, in dem der Begriff als strukturierbares Objekt erkannt und behandelt wird, setzt u. a. die Kenntnis wichtiger Verknüpfungen von Funktionen voraus.

Geometrisches Zeichnen

Das geometrische Zeichnen ist wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts der Grundschule und entfaltet zugleich eine propädeutische Wirkung im Hinblick auf das Lernen und Arbeiten in den weiterführenden Schulen, u. a. als Grundlage für die Erstellung komplexerer Konstruktionen oder für die Darstellung in Koordinatensystemen. In der Primarstufe werden zunächst einfache geometrische Objekte zeichnerisch dargestellt.

In der praktischen Umsetzung fördert das geometrische Zeichnen die Feinmotorik der Kinder ebenso wie ihr ästhetisches Empfinden und kann so zu sorgfältiger und exakter Vorgehensweise motivieren.

Durch das zeichnerische Nachvollziehen können geometrische Erkenntnisse erlangt, vertieft und gefestigt werden. Dies zeigt sich z. B. bei der Durchführung einer Achsenspiegelung an einer diagonal liegenden Achse. Sie erfordert die Kenntnis und konsequentere Anwendung der Eigenschaften einer Achsenspiegelung als der „Standardfall“ einer senkrecht liegenden Achse. Neben dem Verstehen der Aufgabenstellung und dem Wissen um die durchzuführende Zeichenhandlung ist zusätzlich die motorische Fähigkeit zur zeichnerischen Umsetzung Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung einer solchen Aufgabenstellung.

In der Grundschule findet das geometrische Zeichnen u. a. Anwendung in Form von Freihandzeichnungen, Zeichnen von Strecken, geometrischen Figuren und Mustern, Verbinden von Punkten, Vergrößerungen und Verkleinerungen und im Zeichnen und Vervollständigen symmetrischer Figuren. Werden räumliche Figuren gezeichnet, beschränkt sich dies meist auf die Konstruktion von Schrägbildern einfacher mathematischer Körper (z. B. Quader).

Den didaktischen Kommentaren zu den einzelnen Bereichen in Teil III der Didaktischen Handreichungen ist jeweils eine Tabelle vorgeschaltet, aus der ersichtlich wird, ob bei den Aufgaben zusätzlich zur eigentlichen Anforderung Raumvorstellung, Begriffsverständnis und/oder geometrisches Zeichnen notwendig sind. Aufgaben, die mit „(x)“ gekennzeichnet sind, beschreiben Aufgaben, in welchen die jeweilige Fähigkeit die Lösung unterstützen kann, aber nicht muss. Aufgaben, die mit „x“ gekennzeichnet sind, können ohne die jeweilige Fähigkeit kaum gelöst werden.