Fachdidaktische Rückmeldung zu den zentralen Prüfungen am Ende der Klasse 10 (ZP10) im Fach Mathematik

QUA-LiS NRW Arbeitsbereich 5

Qualitäts- und UnterstützungsAgentur – Landesinstitut für Schule

Inhaltsverzeichnis

Seite

Sehr geehrte Kollegin,
sehr geehrter Kollege,

der Hauptschulabschluss am Ende der Klasse 10 sowie der mittlere Schulabschluss (Fachoberschulreife, FOR) werden in NRW in einem Vergabeverfahren mit zentralen Klausuren in den Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik vergeben. In dieser Erstausgabe einer fachdidaktischen Rückmeldung zu den Prüfungen werden Bearbeitungsergebnisse der Schülerinnen und Schüler zu ausgewählten Teilaufgaben aus den Prüfungsklausuren für den Hauptschulabschluss nach Klasse 10 und den mittleren Schulabschluss (FOR) analysiert und kommentiert.[1]

Der Schwerpunkt liegt dabei auf Prüfungsaufgaben der letzten drei Prüfungsjahre,

- deren Lösungshäufigkeit erfreulich hoch oder unerwartet niedrig ist und
- deren Lösung Kompetenzen erfordert, die für den weiteren schulischen Bildungsweg, eine berufliche Ausbildung oder für die gesellschaftliche Teilhabe von hoher Relevanz sind.

Grundlage der Analyse bilden die von den Schulen rückgemeldeten Daten zu den Prüfungsergebnissen. Ausführliche Informationen hierzu finden Sie im Anhang.

Wir möchten bei dieser Gelegenheit allen Lehrerinnen und Lehrern, die seit Einführung der zentralen Prüfungen mit der Ergebnisrückmeldung befasst waren, ganz herzlich für Ihre Bereitschaft danken, diese Aufgabe trotz der damit verbundenen Mühen zu übernehmen. Uns ist der Aufwand, den diese Rückmeldung in der ohnehin turbulenten Zeit am Schuljahresende erfordert, bewusst.

Die rückgemeldeten Daten sowie die Einsicht in die Schülerbearbeitungen bieten eine sehr gute Möglichkeit, die Prüfungsergebnisse auszuwerten: Welche Aufgaben konnten die Schülerinnen und Schüler gut lösen? Wo hatten sie Schwierigkeiten? Wie können die Aufgaben in zukünftigen Prüfungsjahren weiter verbessert werden? Welche Erkenntnisse und Anregungen für den Unterricht lassen sich daraus ableiten?

Dr. Joachim Roß, Referent für Mathematik im Arbeitsbereich 5 der QUA-LiS NRW

Wir freuen uns über Ihre Hinweise und Fragen. Bitte schreiben Sie an
pruefungen10@qua-lis.nrw.de.

[1] Für das Fach Mathematik wurde bereits im Oktober 2013 ein ausführlicher Evaluationsbericht zu den zentralen Prüfungen veröffentlicht, in dem auf der Grundlage ausgewerteter Prüfungsergebnisse und Schülerlösungen Hinweise und Anregungen für den Unterricht abgeleitet wurden. „Analysen und Hinweise zur Bearbeitung ausgewählter Aufgaben der Zentralen Prüfungen 10 Mathematik auf der Grundlage der Ergebnisrückmeldung 2010 – 2012“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung, 2013)
Im geschützten Bereich zum Herunterladen: https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/zp10/

1. Ergebnisse der diesjährigen Prüfungen im Fach Mathematik im Überblick

Eine erste Auswertung der zurückgemeldeten Ergebnisse für die diesjährigen Prüfungen weist für beide Abschlussniveaus keine besonders auffälligen Unterschiede zu den Ergebnissen der Prüfungen 2014 und 2013 auf. Nach den relativ guten Ergebnissen im Bereich des MSA im vergangenen Jahr sind die Prüfungsleistungen in diesem Jahr jedoch wieder auf das Niveau der Vorjahre gesunken (vgl. dazu den Evaluationsbericht des Ministeriums für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen[2]). Wie in den Vorjahren zeigt sich auch in diesem Jahr, dass die von den Schulen vergebenen Vornoten in der deutlichen Mehrheit der Fälle (ca. 80 %) mit der Abschlussnote übereinstimmen. Weicht die Abschlussnote von der Vornote ab, so in der Regel um eine Notenstufe. Abweichungen um mehr als eine Notenstufe betreffen weniger als 1 Promille der Fälle.

1.1 Hauptschulabschluss (2015)

In den Prüfungen auf der Anforderungsebene des Hauptschulabschlusses am Ende der Klasse 10 fallen die mittleren Prüfungsnoten ähnlich wie in den Vorjahren aus. Schülerinnen und Schüler haben Schwierigkeiten, sowohl bei der Bearbeitung von kontextbezogenen Aufgaben im zweiten Prüfungsteil als auch von Aufgaben im ersten Prüfungsteil, die einfache Anwendungsbezüge aufweisen oder innermathematische Fragestellungen beinhalten. Somit zeigen sich auch in der zentralen Abschlussklausur am Ende des Bildungsganges in der Sekundarstufe I Tendenzen, die auch in den Vergleichsarbeiten (VERA 8) sowie den Ländervergleichen zu beobachten sind. Eine nachhaltige Stärkung der Schülerinnen und Schüler in mathematischen Grundkompetenzen bleibt deshalb auch weiterhin eine Herausforderung für den Mathematikunterricht.

1.2 Mittlerer Schulabschluss (2015)

In den Prüfungen auf der Anforderungsebene des mittleren Schulabschlusses liegen die Prüfungsnoten in den Realschulen, Gesamtschulen, Sekundarschulen und Förderschulen im mittleren befriedigenden Bereich, in den Hauptschulen und Abendrealschulen im oberen ausreichenden Bereich. Die im ersten Prüfungsteil gestellten kontextfreien Aufgaben oder Aufgaben mit geringem Kontextanteil werden von den Schülerinnen und Schülern in der Regel zufriedenstellend bewältigt. Mit den Aufgaben aus dem zweiten Prüfungsteil, die umfangreichere Kontextbezüge aufweisen, kommen die Schülerinnen und Schüler, wie auch in den vergangenen Jahren, im Mittel etwas besser zurecht.

Die Auswertung der diesjährigen Ergebnisse wird fortgesetzt. Die folgenden Hinweise und Analysen beziehen sich sowohl auf Aufgaben und Daten aus dem Jahr 2015 als auch auf Aufgaben und Daten aus den Jahren 2013 und 2014.

2. Ergebnisse im Fokus

Im Folgenden werden Stärken und Schwierigkeiten bei der Informationsentnahme aus Graphen und deren Interpretation sowie die Grundvorstellungen zur Prozentrechnung bei Prüflingen für den HSA genauer betrachtet. Zusätzlich werden die Grundvorstellungen der Prüflinge des HSA und MSA bei Körperberechnungen analysiert und schließlich der Umgang mit Termen bei Prüflingen des MSA untersucht.

---

[2] Unter www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/zp10/ steht der jährliche Ergebnisbericht des Ministeriums für Schule und Weiterbildung zur Verfügung. Abweichungen der Durchschnittsnote in Höhe von bis zu 0,5 gegenüber dem Vorjahr nach oben oder unten liegen im Rahmen einer zu erwartenden und unspezifischen Schwankungsbreite.

2.1 Informationsentnahme aus und Interpretation von Graphen (HSA)

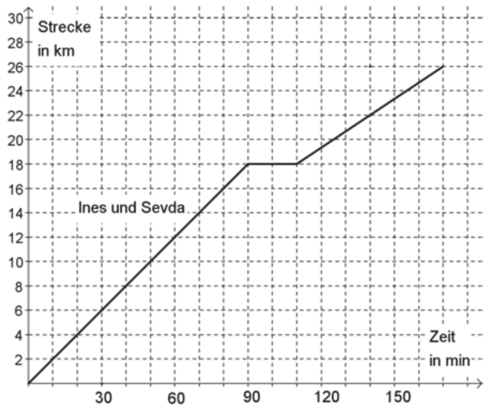
Erfreulich gute Ergebnisse werden bei der Informationsentnahme aus Diagrammen, Graphen und Tabellen erzielt. Das Verarbeiten dieser Informationen in einfacheren Aufgaben gelingt den Schülerinnen und Schülern in der Regel gut, häufig mit einer Ausschöpfungsquote[3] von über 80 %.
In der Aufgabe „Fahrradtour" (siehe unten) wird nach der Informationsentnahme in Teilaufgabe a) die Interpretation eines Graphen einer (abschnittsweisen) linearen Funktion verlangt. Für die geschlossen formulierte Teilaufgabe b) muss mithilfe des Graphen begründet werden, dass eine Pause gemacht wurde. Auch dies gelingt den Prüflingen gut.

HSA 2014 – Fahrradtour

Ines und Sevda fahren 26 km gemeinsam mit dem Fahrrad zu einem Badesee. Der Verlauf der Fahrt ist vereinfacht in dem Diagramm dargestellt.

a) *Wie lange benötigen Ines und Sevda für die ersten 10 km?*

b) *Begründe mihilfe des Graphen, dass Ines und Sevda eine Pause gemacht haben.*



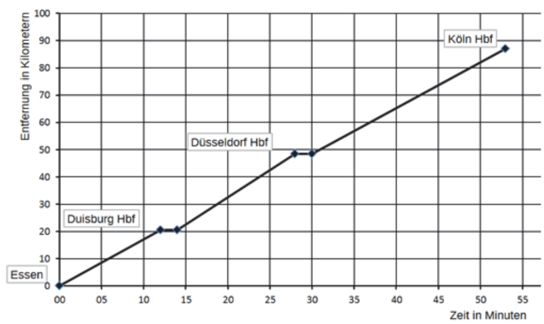
Deutlich geringer ist die Ausschöpfungsquote der vergleichbaren Aufgabe „Bahnfahrt" (siehe unten) aus dem aktuellen Prüfungsjahr (2015). Die Schülerinnen und Schüler müssen den Zusammenhang zwischen den waagerechten Abschnitten des Graphen und den Aufenthalt des Zuges am Bahnhof herstellen. Die Entnahme der Information aus dem Graphen gelingt weiterhin gut, die Interpretation (Aufenthalt des Zuges im Bahnhof) fällt den Prüflingen offensichtlich schwerer, obwohl die Namen der Bahnhöfe in der Grafik die Modellierung unterstützen. Ein wesentlicher Unterschied zu der Aufgabe aus 2014 liegt darin, dass Schülerinnen und Schülern hier die Bedeutung der waagerechten Abschnitte in der Aufgabenstellung nicht vorgegeben wird, diese muss aus dem Verlauf des Graphen abgeleitet werden.

HSA 2015 – Bahnfahrt

Im Internet sehen sich die drei Freunde den Verlauf der Zugfahrt von Essen nach Köln in einem Diagramm an.

c) *Begründe den Zusammenhang zwischen dem Verlauf der Zugfahrt und den waagerechten Abschnitten des Graphen.*

d) *Auf welchem Streckenabschnitt wird die höchste Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht? Begründe mithilfe des Graphen.*



Deutlich schwieriger fällt den Schülerinnen und Schülern schließlich die Graphen gestützte Begründung dafür, in welchem Abschnitt die größte Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht wird. Nur zu etwa einem Viertel der Punkte wird diese Aufgabe im Mittel ausgeschöpft. Dieses Er-

[3] Vgl. die Definition der Ausschöpfungsquote im Anhang.

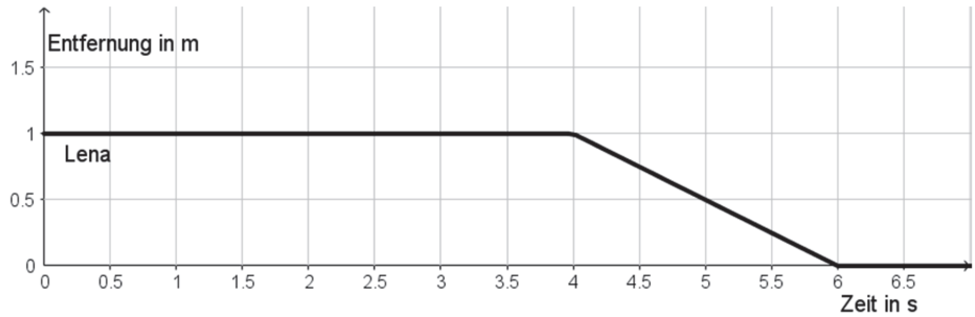
gebnis ist insofern überraschend, als dass Zeit-Weg-Diagramme in vielen Schulbüchern thematisiert sind und diese im Rahmen von Weggeschichten häufig auch im Unterricht anzutreffen sind.

Festzuhalten ist: Die in diesem Jahr vorgenommene relativ geringe Erhöhung der Anforderungen in der Aufgabenstellung führt bereits zu einem merklichen Absinken der Anzahl erfolgreicher Bearbeitungen.

Anregungen zur Unterrichtsgestaltung

Zuordnungen aus dem Alltag bieten für Schülerinnen und Schüler eine geeignete Möglichkeit, Ansätze funktionalen Denkens zu entwickeln, z. B. mihilfe des sog. „Graphen-Gehens“ [4, 5] am Beispiel von Zeit-Weg-Diagrammen [6, 7]: Die Schülerinnen und Schüler erhalten bei dieser erprobten und bewährten Methode die Gelegenheit, sowohl dargestellte Graphen in Bewegungen umzusetzen, als auch Bewegungen in Graphen darzustellen.[8] Durch die Kombination mathematischer Darstellungen mit aktiven Elementen können die Begriffe „Entfernung“, „Zeit“ und „Geschwindigkeit“ erlebt und mit den Darstellungen im Diagramm vernetzt werden. Der Schwerpunkt liegt sicherlich auf dem Erleben der Zusammenhänge „Entfernung“ und „Zeit“ und dem Aufbau eines Verständnisses von funktionalen Zusammenhängen. Darüber hinaus bereitet das „Gehen“ von Graphen oder das graphische Umsetzen einer Bewegung (als Entfernung von einem Ort) den Begriff der „Steigung“ am Beispiel von Geschwindigkeiten vor: Je größer die Geschwindigkeit, desto steiler verläuft der Graph.

Die Erfahrungen können die Schülerinnen und Schüler auch auf Grenzen der grafischen Darstellung und Missverständnisse hinweisen, indem im Unterricht weiterführende Aspekte beleuchtet werden: „Wie könnte Lenas Bewegung von einem festen Punkt aus betrachtet ausgesehen haben (vgl. Abbildung unten)?“ Bei der Lösung dieser (teiloffenen) Aufgabenstellung kann Lena 4 Sekunden still gestanden haben, sie kann sich aber auch auf einer kreisförmigen Bahn um den Punkt herum bewegt haben.



Die Versprachlichung in Form von Bewegungsgeschichten kann die Lernenden zusätzlich dabei unterstützen, ihre Erkenntnisse zu strukturieren und nachhaltig zu verankern. Durch den kreativen Zugang beim Erfinden solcher Bewegungsgeschichten werden gerade die besonderen Punkte und Abschnitte eines Graphen gedeutet. Dabei wird durch den Wechsel zwischen verbaler

[4] Ergänzende Beschreibung ist z. B. unter http://www.mued.de/rundbrief/rb185.pdf, S. 15*f* zu finden

[5] Brauner, U. (2008). Graphen gehen - Ein Gefühl für Diagramme entwickeln. (A. Büchter, Hrsg.) *mathematik lehren* (148), S. 20 – 23.

[6] Vernay, R. (2009). Der Tanz mit dem Stuhl - Vom Graphen zur Bewegung und wieder zurück. *Mathematik 5 bis 10* (8|2009), S. 16 – 18.

[7] Böhm, R. (2015). Zeiten und Wege - Zuordnungen und Funktionen am Beispiel von Weg-Zeit-Diagrammen. *Mathematik 5 bis 10* (30|2015), S. 26 – 29.

[8] Video zur Visualisierung: http://www.schulentwicklung.nrw.de/selbstlernmaterial/ea_funktionsbegriff/ 2._darstellungsarten _von_funktionen_2.3.2_graphen_gehen.html

und grafischer Darstellung das verwendete gedankliche Modell explizit gemacht und somit einer bewussten Überprüfung unterzogen. Im Austausch mit den Mitschülerinnen und Mitschülern können kritische oder nicht tragfähige Konzepte vervollständigt bzw. revidiert werden. Die „Geschichte von Norbert und Heinz“ liefert dafür Anregungen[9].

Des Weiteren ist das Variieren von Aufgabenstellungen ein zentrales Prinzip der systematisierten Begriffsbildung im Unterricht, die auch für den Aufbau einer tragfähigen Vorstellung von der Steigung eines Graphen hilfreich sein kann. Das Prinzip des Variierens wird sehr anschaulich von Schupp dargestellt.[10] Das Variieren von Problemen und Aufgabenstellung durch die Schülerinnen und Schüler erfordert die beiden polaren Voraussetzungen zum Problemlösen: Kreatives und flexibles Denken auf der einen Seite und sachlogisches und kritisches Schließen auf der anderen Seite.
In dem o. g. Beispiel zu Lenas Bewegung ist bereits die Strategie „Richtung wechseln“ oder das „Rückwärts arbeiten“ gefragt, da vom Diagramm ausgehend auf die Ausgangssituation (begründet) geschlossen werden soll. Mit der Strategie „Hinzufügen“ kann gezielter auf das oben beschriebene Problem geführt werden: „Lena bewegt sich langsam, aber ohne stehen zu bleiben im Raum.“ Schließlich könnte mit leistungsstarken Schülerinnen und Schülern der Versuch unternommen werden, solche Probleme verallgemeinert zu beschreiben.

2.2 Grundvorstellungen zur Prozentrechnung (HSA)

Die Aufgabe „Gemüsetheke“ aus dem Jahr 2014 (siehe unten), die die rechnerische Bestätigung eines prozentualen Zusammenhangs erfordert, weist lediglich eine Ausschöpfungsquote[11] von knapp 60 % auf. In Anbetracht der grundlegenden Bedeutung der Prozentrechnung ist dies kein zufriedenstellendes Ergebnis. Die Auswertung der uns vorliegenden Prüfungsarbeiten zeigt, dass die Aufgabe entweder vollständig richtig gelöst oder überhaupt nicht bearbeitet wurde.
In derselben Prüfungsarbeit weisen die Teilaufgaben (z. B. II.1 c) und II.3 c)), die eine mehrschrittige Berechnung von Prozentwerten erfordern, dementsprechend noch geringere Ausschöpfungsquoten auf.

HSA 2014 – Gemüsetheke

An der Gemüsetheke hängt ein Werbeplakat:

Zeige durch Rechnung, dass die Werbung auf dem Plakat stimmt.

Heute 20 % günstiger!		
200 g	Tomaten	statt 0,90 € nur 0,72 € !
1 kg	Möhren	statt 1,90 € nur 1,52 € !

Anregungen zur Unterrichtsgestaltung

Insbesondere zur Prozentrechnung und im weiteren Sinne auch zur Bruchrechnung gibt es vielfältige und geeignete Unterstützungsmaterialien, die erprobt und deren Wirksamkeit wenigstens zum Teil auch empirisch nachgewiesen sind. In den unteren Jahrgangsstufen 5 und 6

[9] Sinus.NRW. (2008). *Die Geschichte von Norbert und Heinz.* (Sinus.NRW, Hrsg.) Abgerufen am 11. Dez. 2015 von http://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/nutzersicht/materialeintrag.php?matId=581
[10] Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen: Aufgabenvariationen im Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.
Auszüge online verfügbar: Abgerufen am 10. September 2015 http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/module/modul_1weiterentwicklung_der_aufgabenkultur/thema_mit_variationen/
[11] Vgl. die Definition der Ausschöpfungsquote im Anhang.

werden mit geeigneten Visualisierungen sowie im Wechsel zwischen Sprache, Darstellung und der mathematisch formalen Schreibweise erste (tragfähige) Vorstellungen dazu aufgebaut.
Allerdings ist dieses Wissen bei den Schülerinnen und Schülern offensichtlich nicht nachhaltig verankert. Büchter und Henn vermuten, dass die Prozentrechnung „ausführlich und abschließend" in den Jahrgangsstufen 6 und 7 behandelt wird[12]. Ohne tragfähige Grundvorstellungen gelingt ein nachhaltiger Aufbau von Kompetenzen nicht. Dabei muss im Unterricht der Spagat zwischen dem sicheren Aufbau bzw. dem Festigen der Grundvorstellungen einerseits und der Aneignung weiterführender Konzepte andererseits gelingen. Differenzierende Angebote müssen also an bekannte Vorstellungen anknüpfen und deren Weiterentwicklung sowie die Ausbildung neuer Konzepte ermöglichen und fördern[13]. Dies kann z. B. durch den Wechsel zwischen mathematischen Schreibweisen, der Wortform und tragfähigen grafischen Darstellungen gelingen, die an bereits in den früheren Jahrgangsstufen thematisierten Vorstellungen anknüpfen und diese erweitern. Werden z. B. durch Bruchscheiben oder Bruchstreifen bereits in der Unterstufe tragfähige Vorstellungen aufgebaut, so können diese im Rahmen der Prozentrechnung und ggf. erneut im Zusammenhang mit prozentualem Wachstum wieder aufgegriffen und zum Teil sogar erweitert werden. Im Rahmen der Fachkonferenz trägt eine verbindliche Absprache einzuführender wesentlicher Modellvorstellungen zu einem nachhaltigen Kompetenzerwerb bei.

Das Wachhalten von Grundvorstellungen und elementaren Lösungswegen sollte zusätzlich durch regelmäßige kleine Kopfübungen[14] unterstützt werden. Ebenso sollte die Prozentrechnung, wo immer möglich, in anderen Zusammenhängen – u. a. auch mit Aufgaben aus der Stochastik – aufgegriffen werden.

2.3 Grundvorstellungen bei Körperberechnungen (HSA und MSA)

Aufgaben zur Körperberechnung, die durch Vorwärtsrechnen zu lösen sind, wurden nach unseren Beobachtungen in den vergangenen Prüfungsjahren weitgehend sicher bewältigt und deuten auf eine relativ große Sicherheit der Prüflinge im Umgang mit Volumenberechnungen hin[15].
Allerdings nimmt die Erfolgsquote bereits bei geringer Erhöhung des Schwierigkeitsgrades der Aufgabenstellung ab, besonders dann, wenn die Notwendigkeit des „Rückwärtsrechnens" besteht (s. u.). Schülerinnen und Schüler, die hier Probleme haben, haben möglicherweise keine tragfähigen Grundvorstellungen von Körpervolumina entwickelt, sondern bewältigen einfache Aufgaben vor allem anhand von Formeln, die auch in der Prüfung bei Bedarf der Formelsammlung entnommen werden können.

Umrechnung von Größen

Die Schülerinnen und Schüler berechnen das Quadervolumen in der unten abgebildeten Aufgabe „Speiseeis" erfolgreich (Ausschöpfungsquote[16] ca. 70 %). Gut 85 % der Schülerinnen und

---

[12] Büchter, A., & Henn, H.-W. (2015). *Schulmathematik und Realität - Verstehen durch Anwenden*. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebecker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand, Handbuch der Mathematikdidaktik (S. 19 – 49). Berlin Heidelberg: Springer.

[13] Vgl. z. B. Altmann, R. (2013). Sinnvolles Üben im Mathematikunterricht. In Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW (Hrsg.), *Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht* (Bd. 9050/1) oder Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S., & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Brüche, Prozente, Dezimalzahlen.* Berlin, vgl. auch http://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/003,

[14] Bruder, R. (2008). *Wider das Vergessen. Fit bleiben durch vermischte Kopfübungen.* mathematik lehren(147).

[15] *Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (Hrsg.) (2013). Analysen und Hinweise zur Bearbeitung ausgewählter Aufgaben der Zentralen Prüfungen 10 Mathematik auf der Grundlage der Ergebnisrückmeldung 2010 bis 2012, Soest.*

[16] Vgl. die Definition der Ausschöpfungsquote im Anhang.

Schüler in der Stichprobe 2 erfassen, dass es sich um einen Quader handelt und wählen einen geeigneten Rechenweg. Das korrekte Volumen berechnen über 70 %. Die Umrechnung von Kubikzentimetern in Liter wird lediglich in 45 % aller Bearbeitungen korrekt durchgeführt. Das Umrechnen von der Einheit Kubikzentimeter in die Einheit Liter hat eine hohe Bedeutung vor allem hinsichtlich einer plausiblen Einschätzung oder Überprüfung des errechneten Ergebnisses: Wer kann sich die Größe eines Körpers mit einem Volumen von 7 128 cm³ vorstellen, wenn man nicht erkennt, dass dies gut 7 Litern entspricht (z. B. etwa 7 gestapelte 1-Liter-Milch-Verpackungen)?

HSA 2014 – Speiseeis

Ein quaderförmiger Behälter für Speiseeis ist 36 cm lang, 16,5 cm breit und 12 cm hoch.

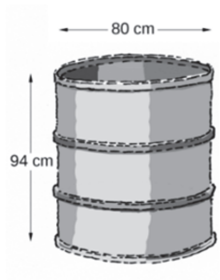
Wie viele Liter Speiseeis passen in diesen Behälter?

Bei der unten abgebildeten Aufgabe „Regentonne“ zeigen die Ergebnisse deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler zumindest in der Prüfungssituation ihre berechneten Werte nicht kritisch hinterfragen: Nur etwas mehr als die Hälfte der Prüflinge erhält bei der Teilaufgabe b) ein realistisches Ergebnis zwischen 100 und 200 Litern. Die angegebenen Ergebnisse variieren von 0,000000634 bis 229127,7 Liter. Die anderen Schülerinnen und Schüler haben entweder keine tragfähige Größenvorstellung entwickelt oder vernachlässigen es als wichtigen Schritt der Modellbildung, das berechnete Ergebnis wieder auf den Sachverhalt zu beziehen.

HSA 2015 – Regentonne

a) Zeige, dass die zylinderförmige Regentonne ein Volumen von ungefähr 472,5 Litern hat.

b) Wie viele Liter Wasser sind ungefähr in der Tonne, wenn sie zu einem Drittel mit Wasser gefüllt ist?



Rückwärtsarbeiten

Wie oben bereits erwähnt haben Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit der Problemlösestrategie „Rückwärtsrechnen“, insbesondere im Zusammenhang mit Körperberechnungen. So weist die Aufgabe zur Körperberechnung eines Dreiecksprismas lediglich eine Ausschöpfungsquote von 30 % auf.

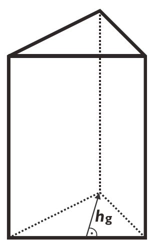
HSA 2013 – Dreiecksprisma

Ein Prisma hat als Grundfläche ein Dreieck mit der Grundseite g = 8 cm und der Höhe h_g = 4 cm.

Das Volumen des Prismas ist 192 cm^3.

Wie hoch ist das Prisma?

Notiere deine Rechnung.



Die Ausschöpfungsquote der vergleichbaren Aufgabe „Getränkedose“ auf dem Niveau des mittleren Schulabschlusses (s. u.) beträgt 50 %. Die meisten Schülerinnen und Schüler in der Stichprobe 2 bearbeiten die Aufgabe. Fast vier von fünf erkennen die Angabe 0,33 l als Maß für das Volumen eines Zylinders als angemessenes geometrisches Modell der Getränkedose und wählen demzufolge eine geeignete Formel als Ansatz für ihre Rechnung. Obwohl die meisten Schülerinnen und Schüler die Aufgabe beginnen, sich also eine Lösung offensichtlich zutrauen, scheitert mehr als ein Drittel komplett und erzielt mit der Aufgabe keine Punkte. Das Umwandeln der unterschiedlichen Maßangaben in eine gemeinsame Einheit gelingt lediglich einem Drittel der Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe bearbeitet haben.

MSA 2015 – Getränkedose

Eine zylinderförmige Getränkedose enthält 0,33 l Mineralwasser und hat einen Durchmesser von 67 mm. Wie hoch ist die Getränkedose mindestens?

Obwohl Getränkedosen aus dem Alltag bekannt sind und auch die Größenangabe „67 mm“ als Durchmesser gut vorstellbar sein sollte, erreichen nur ca. 40 % der Schülerinnen und Schüler ein realistisches Ergebnis zwischen 6 und 12 cm für die Höhe der Getränkedose. Die errechneten Höhen variieren zwischen 0,000093 mm und 1165,4 cm. Vermutlich wird kein adäquates Situationsmodell gebildet, sondern die Berechnung allein mihilfe einer Formel vorgenommen, oder die berechneten Werte werden nicht erneut auf den Kontext übertragen. Ein Indiz dafür könnte möglicherweise der geringe Anteil von 19 % der Bearbeitungen sein, die eine Skizze aufweisen.

Anregung zur Unterrichtsentwicklung

Wie können Schülerinnen und Schüler bei der Berechnung von Körpern tragfähige Vorstellungen von den Größen und Einheiten entwickeln und lernen, diese in Anwendungssituationen sicher anzuwenden? Geeignete Situationsmodelle werden bereits in den Eingangsklassen der Sekundarstufe thematisiert und durch Skizzen als Grundlage für die weitere Bearbeitung veranschaulicht. Inwieweit dabei eine kritische Auseinandersetzung mit den Vorstellungen und damit verbunden auch ein bewusster Einsatz von Modellen zum Problemlösen erfolgt, hängt stark von der Gestaltung des Unterrichts ab.[17] Hilfreich ist es sicherlich, wenn auch in späteren Jahrgängen die Körperberechnung in unterschiedlichen Sachzusammenhängen häufiger wieder aufgegriffen und vertieft wird, z. B. durch Verbalisierungen verwendeter Situationsmodelle und die kritische Auseinandersetzung der Lernenden damit[18].

Wäre die Aufgabe „Getränkedose“ im Unterricht gestellt worden und die Ergebnisse fielen so unterschiedlich wie in der Prüfung aus, könnten die Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellungen zu der Getränkedose mit Worten beschreiben und sich darüber austauschen: „Wie stelle ich mir diese Getränkedose vor?“, „Wie hoch müsste sie ungefähr sein?“, „Wie groß ist die Getränkedose, die hier berechnet wurde, im Vergleich mit einem anderen bekannten Gegenstand?“ Dadurch, dass die Schülerinnen und Schüler Ideen formulieren und austauschen, wird das Situationsmodell explizit. Widersprüche werden von den Schülerinnen und Schülern schnell erkannt und häufig sofort korrigiert. Die sprachliche Umsetzung kann ebenso wie das Erstellen einer

[17] Bruder, R., Leuders, T., & Büchter, A. (2008). *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten.* Berlin: Cornelsen/Scriptor.

[18] Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Gürsoy, E., & Benholz, C. (2015). Sprachkompetenz und Mathematikleistung - Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen 10. *Journal für Mathematik-Didaktik*(36), S. 77 – 104

Skizze ein Weg sein, mit dem die Schülerinnen und Schüler lernen, selbstständig geeignete Situationsmodelle zu bilden.

2.4 Umgang mit Termen (MSA)

Die Ergebnisse der Prüfungen zum mittleren Schulabschluss (MSA) zeigen, dass das Aufstellen von Termen den Schülerinnen und Schülern der Klasse 10, die den mittleren Schulabschluss anstreben, nicht leicht fällt.

Begründen einer gegebenen Formel

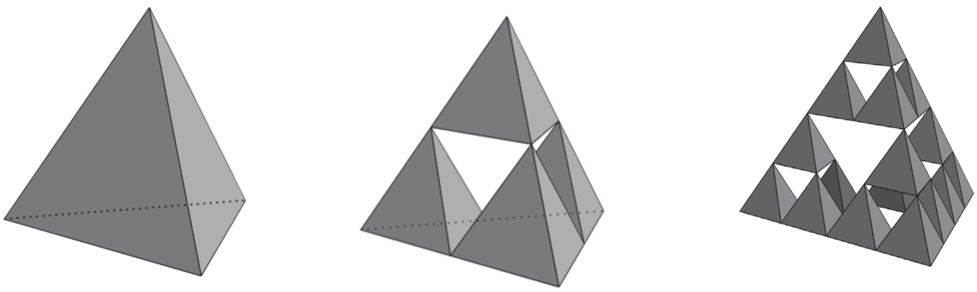
Bei der Aufgabe „Tetraeder“ wird in Teilaufgabe c) eine Begründung für eine gegebene Formel zur Oberflächenberechnung eines Tetraeders gefordert (s. u.). Die Bezeichnungen sind den Schülerinnen und Schülern nur in Wortform ohne Skizze gegeben. Im Durchschnitt erzielen die Prüflinge lediglich ca. 0,5 von möglichen 3 Punkten, 75 % von ihnen erreichen keinen Punkt. Die Auswertung der Stichprobe 2 ergibt, dass fast ein Drittel der Prüflinge keinen Lösungsversuch unternommen hat.

MSA 2015 – Tetraeder (in Bottrop)

Zur Bestimmung der Oberfläche einer Pyramide müssen die Inhalte der Grundfläche und der Seitenflächen addiert werden. Luca findet in einer Formelsammlung jedoch: $O = 2 \cdot a \cdot h_s$, wobei a die Kantenlänge und h_S die Höhe der Seitenfläche bezeichnen.

c) Begründe, wie die Oberflächenformel des Tetraeders zustande gekommen ist.

Dem Tetraeder in Bottrop liegt eine mathematische Struktur zugrunde. In jedem Schritt entstehen aus jedem Tetraeder vier kleinere Tetraeder. Die Kantenlänge der neuen Tetraeder wird dabei in jedem Schritt halbiert (vgl. Abbildungen unten).



Schritt 0 (Ausgangsfigur) Schritt 1 Schritt 2

d) Ergänze die folgende Tabelle:

	Schritt 0	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3
Anzahl der Tetraeder	1	4		64
Kantenlänge eines Tetraeders (cm)	60	30		

e) Gib einen Term an, mit dem du die Anzahl der Tetraeder für jeden beliebigen Schritt s berechnen kannst.

Die vollständig richtigen Bearbeitungen von Schülerinnen und Schülern setzen sich aus formalen Nachweisen und aus einer geometrisch anschaulichen Begründung zusammen. Allerdings werden nicht alle dieser Argumentationen von den beurteilenden Lehrkräften mit voller Punktzahl bewertet. Unvollständige Bearbeitungen enthalten zwar häufig eine „Startidee“ (Lösungsansatz), lassen aber im weiteren Verlauf der Bearbeitung keinen Begründungszusammenhang erkennen.

Aufstellen eines Terms – MSA 2015

In der Aufgabe „Tetraeder“ (Teilaufgabe e) soll ein Term aufgestellt werden (s. o.). Trotz der als Lösungshilfe vorgegebenen Tabelle werden im Schnitt nur ein Fünftel der möglichen Punkte erreicht, obwohl die Tabelle von den meisten Prüflingen korrekt ausgefüllt wird. In den vorliegenden Schülerbearbeitungen aus Stichprobe 2 erreicht ein Viertel der Prüflinge eine vollständig richtige Lösung, ein Drittel weist keine erkennbaren Bearbeitungen der Teilaufgabe auf.

Häufig auftretende Fehler sind folgende: Anstelle der Potenz wird das Produkt $(4 \cdot s)$ angegeben, oder es wird ein Term aus der Kantenlänge und der Anzahl der Tetraeder gebildet, z. B. $x \cdot 4$ und $y : 2$. In diesem Fall wird vermutlich versucht, einen rekursiven Ansatz bei der Aufstellung eines Terms zu verfolgen, was zwar durchaus problemangemessen ist, aber nicht korrekt umgesetzt wird. Die Anzahl der Tetraeder wird dabei vervierfacht und die Kantenlänge in jedem Schritt halbiert. Weitere Fehler treten häufig auch in Kombination mit den genannten Fehlern auf.

Da es sich um einen exponentiellen Wachstumsprozess handelt, sollten deutlich mehr Schülerinnen und Schüler den Term angeben können. Die Auswertung der Prüfungsaufgabe „Blattlaus“ (MSA 2013, Aufgabe II.2, hier nicht abgebildet) zeigt, dass die Schülerinnen und Schüler sehr wohl in der Lage sind, mit einem vorgegebenen mathematischen Modell für exponentielles Wachstum zu arbeiten und die Ergebnisse im Kontext zu interpretieren.

Anregungen zur Unterrichtsentwicklung

Das Aufstellen von Termen ist anspruchsvoll und erfordert ein intensives Durchdringen der Struktur des zu beschreibenden Sachzusammenhangs. Insbesondere bei rekursiven Termen müssen Strategien aufgebaut werden, wie schrittweise Entwicklungen geschickt zusammengefasst werden können. Das Kennen und Anwenden von geeigneten Schritten der Termumformung sowie das Identifizieren von äquivalenten Termen erfordert ein hohes Maß an gedanklicher Flexibilität und setzt Erfahrung sowie ein hohes Abstraktionsvermögen voraus.

Der Einsatz einer Tabellenkalkulation kann helfen, die vorhandenen Zellbezüge zum Verstehen von Termstrukturen zu nutzen und dadurch das Aufstellen von Termen zu erleichtern. Im Zusammenhang mit linearen oder exponentiellen Zusammenhängen werden häufig die Veränderungen durch Operationen dargestellt ($\xrightarrow{+3}$ oder $\xrightarrow{\cdot 4}$). Dieser Schritt zur Termbildung wird durch die Tabellenkalkulation gefördert, da dort iterative Terme zum Einsatz kommen können. Der letzte entscheidende Schritt ist schließlich die direkte, nicht rekursive, Berechnung eines Wertes. Dabei fördern eigene reflektierte Erfahrungen, gleichwertige Terme auf unterschiedlichen Wegen aufzustellen, diesen Entwicklungsprozess der Termbildung. Die dem Problemlösen zugrundeliegenden Prozesse müssen den Schülerinnen und Schülern auch im Zusammenhang mit dem Aufstellen von Termen vertraut sein, so dass sie Ansätze zielgerichtet aufstellen und diese mit geeigneten Methoden überprüfen können. Das Erkennen mathematischer Strukturen kann im Unterricht durch das Reflektieren von Lernprozessen, z. B. durch eine entsprechende Dokumentation unterstützt werden.[19]

Mit Blick auf ein tiefergehendes Verständnis exponentiellen Wachstums und der sicheren Identifizierung desselben ist es hilfreich, Terme zu gegebenen Graphen und Funktionsvorschriften zu

[19] DZLM. (2015). *Lernförderliche Unterrichtsstrukturen - Mathe sicher können*. Abgerufen am 15. Dezember 2015 von http://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/node/368/lernförderliche-unterrichtsstrukturen/fortbildungsmodule Material zur Fortbildung

bestimmen. Ein sicherer Wechsel zwischen den unterschiedlichen Darstellungsarten (Tabelle, Graph, Term) begünstigt auch die Abgrenzung der den unterschiedlichen Arten von Wachstum zugrundeliegenden funktionalen Zusammenhänge. Dabei bietet ein Einsatz von Funktionenplottern (oder anderen dynamischen Werkzeugen) den Vorteil, zeiteffizient verschiedene Funktionenklassen miteinander zu vergleichen und so die charakteristischen Eigenschaften der jeweiligen Funktionen zu erfassen[20]. Ein Vergleich von Graphen, die mihilfe von iterativen Termen erzeugt wurden (z. B. durch `B2=B1*4, B3=B2*4,`…), mit den bekannten Graphen von linearen, quadratischen und exponentiellen Funktionen hilft dabei, deren Eigenschaften und Zusammenhänge zu erfassen. Eine Verankerung und Systematisierung der mathematischen Modelle erleichtert schließlich wiederum das Aufstellen geeigneter Terme.

[20] vgl. Metzger, H., Lindner, A., & Bleier, G. (2009). *Ein Lernpfad zur Schnittstelle Sekundarstufe I/Sekundarstufe II*. Abgerufen am 24. August 2015 von: http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/lernpfade/lernpfad_schnittstelle89_funktionen,
oder Elschenbroich, H.-J., & Henn, H.-W. (2014). Funktionan analysieren. (H.-J. Elschenbroich, & H.-W. Henn, Hrsg.) *mathematik lehren* (187).

3. Anhang: Datengrundlage

Die Beobachtungen stützen sich auf folgende Daten, die in jedem Jahr für die beiden Abschlussniveaus (HSA, MSA) erhoben werden:

3.1 Stichprobe 1

Ca. 30 Schulen der am Prüfungsverfahren beteiligten Schulformen werden gebeten, die für jede Teilaufgabe vergebenen Rohpunkte für jeweils eine Lerngruppe zurückzumelden. Die 30 Schulen werden so ausgewählt, dass sie weitgehend repräsentativ für die Schulen der jeweiligen Schulform im Land Nordrhein-Westfalen sind. Die Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler, für die diese Daten vorliegen, wird im Bericht als *Stichprobe 1* bezeichnet. Im Bericht wird schulformübergreifend nach den beiden Abschlüssen differenziert:

- Hauptschulabschluss nach Klasse 10 (HSA): Hauptschulen Klasse 10 Typ A, Gesamtschule Grundkurs
- Mittlerer Schulabschluss (MSA): Hauptschulen Klasse 10 Typ B, Gesamtschule Erweiterungskurs, Realschule

Ausschöpfungsquote (Definition)

Aus der Stichprobe 1 lässt sich für jede Teilaufgabe u. a. die sogenannte *Ausschöpfungsquote* berechnen.

Die Ausschöpfungsquote ist der prozentuale Anteil an der maximal erreichbaren Punktzahl, den Schülerinnen und Schüler in der Klausur im Mittel erzielt haben. Eine Ausschöpfungsquote von 50 % bedeutet also, dass Schülerinnen und Schüler im Mittel die Hälfte der erreichbaren Punkte erzielt haben.

3.2 Stichprobe 2

Um hier tiefer gehende Erkenntnisse zu gewinnen, werden die Schulen über die Dateneingabe hinaus gebeten, anonymisiert jeweils drei Klausuren (eine im oberen, eine im mittleren und eine im unteren Leistungsspektrum) zu kopieren und der Qualitäts- und UnterstützungsAgentur/Landesinstitut für Schule (QUA-LiS) zur Verfügung zu stellen. Die Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler, deren Klausur vorliegt, werden im Bericht als *Stichprobe 2* bezeichnet. Über die Repräsentativität dieser Stichprobe kann nichts ausgesagt werden, da die Auswahl den Schulen obliegt. Dennoch lassen sich aus den Prüfungsarbeiten bei vorsichtiger Deutung der Befunde Erkenntnisse gewinnen, die von allgemeiner Bedeutung sind.

4. Literaturverzeichnis

Altmann, R. (2013). Sinnvolles Üben im Mathematikunterricht. In Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (Hrsg.), *Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht* (Bd. 9050/1).

Böhm, R. (2015). Zeiten und Wege – Zuordnungen und Funktionen am Beispiel von Weg-Zeit-Diagrammen. *Mathematik 5 bis 10* (30|2015), S. 26 – 29.

Brauner, U. (2008). Graphen gehen – Ein Gefühl für Diagramme entwickeln. (A. Büchter, Hrsg.) *mathematik lehren* (148), S. 20 – 23.

Bruder, R. (2008). Wider das Vergessen. Fit bleiben durch vermischte Kopfübungen. *mathematik lehren* (147).

Bruder, R., Hefendehl-Hebecker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (Hrsg.). (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

Bruder, R., Leuders, T., & Büchter, A. (2008). *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten.* Berlin: Cornelsen/Scriptor.

Büchter, A., & Henn, H.-W. (2015). Schulmathematik und Realität - Verstehen durch Anwenden. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebecker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand, *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 19 – 49). Berlin Heidelberg: Springer.

DZLM. (2015). *Ausgewähltes Material zum Inhaltsbereich 'Brüche, Prozente und Dezimalzahlen'.* Abgerufen am 11. September 2015 von Mathe sicher können: http://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/003

DZLM. (2015). *Lernförderliche Unterrichtsstrukturen – Mathe sicher können*. Abgerufen am 15. Dezember 2015 von http://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/node/368/lernförderliche-unterrichtsstrukturen/fortbildungsmodule

Elschenbroich, H.-J., & Henn, H.-W. (2014). Funktionan analysieren. (H.-J. Elschenbroich, & H.-W. Henn, Hrsg.) *mathematik lehren* (187).

Metzger, H., Lindner, A., & Bleier, G. (2009). *Lernpfad Funktionen*. Abgerufen am 24. August 2015 von Ein Lernpfad zur Schnittstelle Sekundarstufe I/Sekundarstufe II: http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/lernpfade/lernpfad_schnittstelle89_funktionen

Ministerium für Schule und Weiterbildung. (2013). *Analysen und Hinweise zur Bearbeitung ausgewählter Aufgaben der Zentralen Prüfungen 10 Mathematik auf der Grundlage der Ergebnisrückmeldung 2010 bis 2012.* Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW, Soest.

Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S., & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2014). *Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Brüche, Prozente, Dezimalzahlen.* Berlin.

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Gürsoy, E., & Benholz, C. (2015). Sprachkompetenz und Mathematikleistung - Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen 10. *Journal für Mathematik-Didaktik*(36), S. 77 – 104.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen: Aufgabenvariationen im Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.

Schupp, H. (2006). *Thema mit Variationen*. Abgerufen am 10. September 2015 von Sinus-Transfer: http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/module/modul_1weiterentwicklung_der_aufgabenkultur/thema_mit_variationen/

Sinus.NRW (2008). *Die Geschichte von Norbert und Heinz.* (Sinus.NRW, Hrsg.) Abgerufen am 11. Dez. 2015 von http://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/nutzersicht/materialeintrag.php?matId=581

Vernay, R. (2009). Der Tanz mit dem Stuhl – Vom Graphen zur Bewegung und wieder zurück. *Mathematik 5 bis 10*(8|2009), S. 16 – 18.