Fachdidaktische Rückmeldung zu den zentralen Prüfungen am Ende der Klasse 10 (ZP10) im Fach Mathematik

Prüfungsjahrgang 2016

QUA-LiS NRW Arbeitsbereich 5

Qualitäts- und UnterstützungsAgentur – Landesinstitut für Schule

Autoren: Natascha Besuch, Dr. Joachim Roß

Fachliche Beratung: Dirk Bresinsky, Dieter Schluckebier

Herausgegeben von der
Qualitäts- und UnterstützungsAgentur –
Landesinstitut für Schule
des Landes Nordrhein-Westfalen (QUA-LiS NRW)
Paradieser Weg 64, 59494 Soest
Februar 2017

Sehr geehrte Kollegin,
sehr geehrter Kollege,

der Hauptschulabschluss am Ende der Klasse 10 sowie der mittlere Schulabschluss (MSA) werden in NRW in einem Vergabeverfahren mit zentralen Klausuren in den Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik vergeben. In dieser zweiten fachdidaktischen Rückmeldung zu den Prüfungen werden erneut Bearbeitungsergebnisse der Schülerinnen und Schüler zu ausgewählten Teilaufgaben der Prüfungsklausuren für den Hauptschulabschluss nach Klasse 10 und den mittleren Schulabschluss analysiert und kommentiert.[1]

Der Schwerpunkt liegt dabei auf Prüfungsaufgaben des letzten Jahres,

- deren Lösungshäufigkeit erfreulich hoch oder unerwartet niedrig ist und
- deren Lösung Kompetenzen erfordert, die für den weiteren schulischen Bildungsweg, eine berufliche Ausbildung oder für die gesellschaftliche Teilhabe von hoher Relevanz sind.

Inhaltlich nehmen wir in diesem Jahr in den Blick, inwieweit Schülerinnen und Schüler ein Grundverständnis von Variablen und Termen aufgebaut haben. Darüber hinaus haben wir die erzielten Leistungen bei der Bearbeitung von Prüfungsaufgaben zum mathematischen Modellieren ausgewertet, die ein Grundverständnis von quadratischen Funktionen voraussetzen. Als dritten Schwerpunkt haben wir die Erfassung und Bewertung von Leistungen von Teilaufgaben mit mehreren Schritten und die Bewertung des Umgangs mit Maßeinheiten und der Darstellungsleistung in den Blick genommen. Hierzu erreichen uns immer wieder Anfragen von Lehrkräften.

Grundlage der Analyse bilden die von den Schulen rückgemeldeten Daten zu den Prüfungsergebnissen. Ausführliche Informationen hierzu finden Sie im Anhang. Die rückgemeldeten Daten sowie die Einsicht in die Schülerbearbeitungen bieten eine sehr gute Möglichkeit, die Prüfungsergebnisse auszuwerten: Welche Aufgaben konnten die Schülerinnen und Schüler gut lösen? Wo hatten sie Schwierigkeiten? Wie können die Aufgaben in zukünftigen Prüfungsjahren weiter verbessert werden? Welche Erkenntnisse und Anregungen für den Unterricht lassen sich daraus ableiten?

Wir möchten bei dieser Gelegenheit allen Lehrerinnen und Lehrern, die seit Einführung der zentralen Prüfungen mit der Ergebnisrückmeldung befasst waren, ganz herzlich für Ihre Bereitschaft danken, diese Aufgabe trotz der damit verbundenen Mühen zu übernehmen. Uns ist der Aufwand, den diese Rückmeldung in der ohnehin turbulenten Zeit am Schuljahresende erfordert, bewusst.

Natascha Besuch und Dr. Joachim Roß

Wir freuen uns über Ihre Hinweise und Fragen. Bitte schreiben Sie an
pruefungen10@qua-lis.nrw.de.

---

[1] Für das Fach Mathematik wurde im Oktober 2013 ein ausführlicher Evaluationsbericht zu den zentralen Prüfungen veröffentlicht, in dem auf der Grundlage ausgewerteter Prüfungsergebnisse und Schülerlösungen Hinweise und Anregungen für den Unterricht abgeleitet wurden. „Analysen und Hinweise zur Bearbeitung ausgewählter Aufgaben der Zentralen Prüfungen 10 Mathematik auf der Grundlage der Ergebnisrückmeldung 2010 – 2012“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung, 2013)
Im geschützten Bereich zum Herunterladen: https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/zp10/

Inhaltsverzeichnis

1. Ergebnisse der diesjährigen Prüfungen im Fach Mathematik im Überblick

Die empirische Auswertung der zurückgemeldeten Ergebnisse für die diesjährigen Prüfungen weist keine auffälligen Unterschiede zu den Ergebnissen der vergangenen Jahre aus. Die mittleren Prüfungsnoten variieren lediglich um eine halbe Notenstufe gegenüber dem langjährigen Mittelwert. Wie in den Vorjahren zeigt sich auch in diesem Jahr, dass die von den Schulen vergebenen Vornoten in der deutlichen Mehrheit der Fälle mit der Abschlussnote übereinstimmen. Weicht die Abschlussnote von der Vornote ab, so in der Regel um eine Notenstufe. Abweichungen der Abschlussnote um mehr als eine Notenstufe betreffen weniger als 1 Promille der Fälle.

1.1 Hauptschulabschluss (2016)

Nach den etwas geringeren Leistungen im HSA in den vergangenen drei Prüfungsjahren, ist in diesem Jahr eine moderat positive Entwicklung der Prüfungsleistungen festzustellen. Dies ist sehr erfreulich und wurde von den befragten Lehrkräften des Landes ebenfalls positiv angemerkt. Wir konnten anhand der eingereichten Bearbeitungen der Prüfungsaufgaben der vergangenen Jahre feststellen, dass durch minimale Erhöhung der heuristischen Schwierigkeit eine auffallend hohe Quote der Schülerinnen und Schüler Teilaufgaben ohne Punkte abschließen bzw. die Bearbeitung abbrechen, während die a priori minimal leichter eingeschätzte Aufgabe deutlich besser gelöst werden konnte.[2]

Zieht man die Bearbeitungen der Prüflinge zurate, liegt der Schluss nahe, dass grundlegende Vorstellungen zu mathematischen Konzepten vorhanden sind, diese aber in vernetzten Aufgaben oder Alltagssituationen nicht zielführend abgerufen und angewandt werden können. Eine mathematische (Grund-)Vorstellung von einem Zusammenhang entwickelt zu haben, bedeutet aber gerade auch, dass diese in unterschiedlichen Situationen sicher angewandt werden kann. Die Ergebnisse aus dem ersten Prüfungsteil in Grund- bzw. Standardaufgaben fallen zum Teil erfreulich gut aus: Zum Beispiel sind vier von fünf Prüflingen, die insgesamt keine ausreichende Prüfungsleistung erzielen, in der Lage, das Volumen einer quadratischen Pyramide zu berechnen. Die Verbindung zwischen Volumen und Gewicht zu bestimmen gelingt aber bereits deutlich weniger Schülerinnen und Schülern; der lineare Zusammenhang wird offensichtlich nicht erfasst oder ist mangels Erfahrung aus dem Unterricht überhaupt nicht bekannt.

Ebenfalls konnten wir beobachten, dass Schülerinnen und Schüler die Bearbeitung einer kontextbezogenen Aufgabe abbrechen, wenn bereits bei der ersten Teilaufgabe Schwierigkeiten auftreten. Bei der Konstruktion der Aufgaben wurde daher in diesem Jahr besonders darauf Wert gelegt, dass die erste Teilaufgabe leicht zugänglich ist. In den diesjährigen Auswertungen wird deutlich, dass mehr Schülerinnen und Schüler auch nach einer nicht gelösten bzw. nicht bearbeiteten Teilaufgabe mit den nachfolgenden Aufgaben weitergearbeitet haben.

1.2 Mittlerer Schulabschluss (2016)

In den Prüfungen auf der Anforderungsebene des mittleren Schulabschlusses liegen die Prüfungsnoten in den Realschulen, Gesamtschulen, Sekundarschulen und Förderschulen im mittleren befriedigenden Bereich, in den Hauptschulen und Abendrealschulen im oberen ausreichenden Bereich. Die im ersten Prüfungsteil gestellten kontextfreien Aufgaben oder Aufgaben mit gerin-

[2] vgl. QUA-LiS.NRW 2016: Fachdidaktische Rückmeldung zu den zentralen Prüfungen am Ende der Klasse 10 (ZP10) im Fach Mathematik 2015, S. 5 *ff.*

gem Kontextanteil werden von den Schülerinnen und Schülern in der Regel zufriedenstellend bewältigt. Mit den Aufgaben aus dem zweiten Prüfungsteil erzielen die Schülerinnen und Schüler im Mittel weniger Punkte.
Grundsätzlich ist dies auch zu erwarten, da die Aufgaben im zweiten Prüfungsteil meist Bezüge zu einem Sachkontext aufweisen und nicht nur darum komplexer sind. Insgesamt sind jedoch die Ausschöpfungsquoten der Aufgaben im zweiten Prüfungsteil in diesem Jahr geringer und können nicht zufriedenstellen.

Auffällig ist unter anderem, dass häufig der Bezug zwischen (Funktions-)Term und der Aufgabe nicht hergestellt werden kann und dass der formale Umgang mit Termen nicht sicher beherrscht wird. Auf diese Aspekte wird in dem Abschnitt 2.3 Modellieren mit quadratischen Funktionen näher eingegangen.

2. Ergebnisse im Fokus

2.1 Tabellenkalkulation im Unterricht (HSA und MSA)

Das Aufstellen von Termen (Anforderungsebene MSA) und die Bearbeitung der Aufgabe „Klassenfahrt" (Anforderungsebene HSA) waren im Bericht des vergangenen Jahres Anlass, den unterstützenden Charakter von Tabellenkalkulationen aufzuzeigen. Im Rahmen der Noteneingabe zur diesjährigen ZP10 haben wir die Lehrkräfte gebeten, Fragen zum Umgang mit Tabellenkalkulationen im Unterricht zu beantworten. Dieser Bitte sind 163 Lehrerinnen und Lehrer nachgekommen.

Mehr als 95 % der Lehrerinnen und Lehrer geben an, Tabellenkalkulationen im Unterricht einzuführen, etwa zwei Drittel nutzen dazu Aufgabenstellungen, mit denen die Schülerinnen und Schüler selbstständig arbeiten können. Die Hälfte gibt an, den Schülerinnen und Schülern Übungsdateien zur Verfügung zu stellen, so dass diese nicht mit einer leeren Tabelle starten müssen.

Im Wesentlichen werden Tabellenkalkulationen im Unterricht zum Berechnen und zum Visualisieren von Daten genutzt, etwa ein Drittel der Lehrkräfte gibt an, diese auch zum Entdecken von mathematischen Zusammenhängen zu nutzen. Lediglich zwölf Lehrkräfte gaben an, dass sie im Unterricht gar nicht auf dieses elektronische Hilfsmittel zurückgreifen und begründen dies vor allem mit fehlender Ausstattung und Zeit.

Der Median der Unterrichtsstunden, in denen Tabellenkalkulationen in den letzten beiden Schuljahren vor der ZP10 genutzt worden sind, beträgt acht Unterrichtsstunden in insgesamt lediglich zwei verschiedenen Sequenzen.

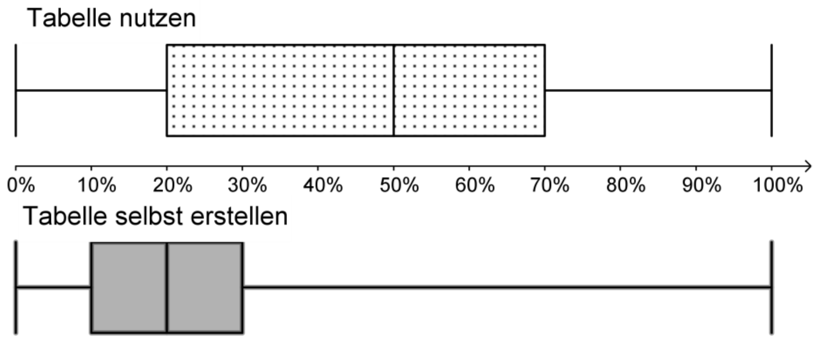


Abbildung 1: Einschätzung der Lehrkräfte: „Wie viel Prozent Ihrer diesjährigen ZP10-Prüflinge können Ihrer Einschätzung nach eine Tabellenkalkulation zum Planen und Darstellen von Kosten nutzen bzw. selbstständig erstellen (vgl. Aufgabe II 2, HSA 2015 und Aufgabe I 3, MSA 2015)?"

Die Antworten weisen insbesondere bezogen auf die Frage, wie viele der eigenen Schülerinnen und Schüler eine vorgegebene Tabelle zum Planen tatsächlich nutzen können, eine unerwartet breite Streuung auf (Abbildung 1). Das selbstständige Erstellen einer Tabelle zur Planung trauen die Lehrkräfte im Mittel lediglich 20 % ihrer Schülerinnen und Schüler zu. Aber auch hier streuen die Angaben von 0 % bis zu 100 %.

2.2 Grundverständnis von Variablen und Termen (HSA)

Bereits in der Grundschule werden die ersten Vorstellungen zu Variablen und Termen grundgelegt. Unterschiedliche Bedeutungen beider mathematisch formalen Grundbausteine werden in der Sekundarstufe I schließlich genutzt und die Begriffe und Vorstellungen aufbauend erweitert. Die ausgewählte Aufgabe auf dem Niveau des Hauptschulabschlusses gibt einen Einblick in Variablenvorstellungen der Schülerinnen und Schüler. Mehr als die Hälfte der Prüflinge hat diese Aufgabe vollständig richtig gelöst, etwa ein Drittel erreicht aber keinen Punkt.

HSA 2016 – Abschlussfahrt

Die Schülerinnen und Schüler planen eine Hafenrundfahrt. Sie möchten auch das Miniatur-Wunderland besuchen. Sie finden folgende Preisangaben:

Hafenrundfahrt	Erwachsene:	21,00 €
	Jugendliche (unter 18):	10,50 €
Miniatur-Wunderland	Erwachsene:	13,00 €
	Jugendliche (unter 18):	9,00 €

Die Kosten für die Hafenrundfahrt und das Miniatur-Wunderland können so berechnet werden:

Kosten $= x \cdot (21{,}00 + 13{,}00) + y \cdot (10{,}50 + 9{,}00)$

d) Gib die Bedeutung von x und y in dieser Rechnung an.

Vielen Schülerinnen und Schülern gelingt es, die Zusammenhänge aus Formel und Tabelle im Ansatz zu erfassen. In vollständig richtigen Lösungen wird die Bedeutung der Variablen x und y entweder allgemein und sachlich richtig beschrieben, oder es werden die konkreten Angaben aus dem Text mit den Variablen in Bezug gebracht: „x steht für die zwei Erwachsenen und y für die 30 Schüler." Ebenfalls als richtig zu werten ist die Angabe $x = 2$ und $y = 30$, da die Aufgabenstellung diese Deutung zulässt und auch die Zuweisung zu der Anzahl richtig vorgenommen wird; die Bedeutung der Variablen wird aber nicht mit eigenen Worten angegeben.

Eine ganze Reihe von Schülerinnen und Schülern hat dagegen grundlegende Schwierigkeiten, die Bedeutung der Variablen im Sachzusammenhang richtig zu erfassen: Fälschlich wird ein Zusammenhang mit den Kosten des Ausflugszieles, dem Ausflugsziel selbst („x = Hafenrundfahrt") oder dem zu zahlenden Preis („Die Variable x steht für die Gesamtkosten der Lehrkräfte") angenommen. Auffallend ist, dass insbesondere beim letztgenannten Fehler häufiger ein bzw. sogar zwei Punkte durch die Lehrkräfte gegeben werden, obwohl solche fehlerhaften Zuordnungen nach den Bewertungsvorgaben mit null Punkten zu werten sind.

Anregungen zur Unterrichtsgestaltung

Die Aufgabe „Abschlussfahrt" bietet ein hohes Potential, im Unterricht zu Übungs- und Diagnosezwecken genutzt zu werden. Hierzu ist es sinnvoll und erwünscht, dass die Lehrkraft die Aufgaben entsprechend variiert oder durch Schülerinnen und Schüler modifizieren lässt (Schupp 2002, Leuders et al. 2016).

Diagnoseaufgabe

Dass die Aufgabe als eine Diagnoseaufgabe eingesetzt werden kann, wurde bereits durch die detaillierte Betrachtung der Schülerbearbeitungen (vgl. oben) verdeutlicht. Weitere gezielte Variationen ermöglichen schließlich, im Unterricht tragfähige Vorstellungen aufzubauen, sowie fehlerhafte oder nicht tragfähige Vorstellungen bewusst zu machen und daraus Strategien, z. B. für das Hinterfragen eigener Annahmen und Vorstellungen, abzuleiten: Wofür steht $(21{,}00 + 13{,}00)$ im Sachzusammenhang? Was ändert sich, wenn der Wert von x sich ändert? Wie berechne ich den Wert eines Produkts aus einer Zahl und einer Summe?

Zu klären ist dabei auch, welches Verständnis von Variablen die Schülerinnen und Schüler verwenden: Variable als Unbestimmte, Variable als Veränderliche oder Variable als Unbekannte? Einige Bearbeitungen durch die Prüflinge legen nahe, dass die Vorstellung einer Variable als Unbekannte vorherrscht: Sie versuchen den Wert der Variablen aus der Gleichung zu ermitteln (vgl. Abbildung 2). Notiert man diese Aussage mathematisch formal, so ergeben sich die Gleichungen $x = 21{,}00 + 13{,}00$ bzw. $y = 10{,}50 + 9{,}00$. Wird diese Aufgabe im Unterricht eingesetzt, so ist für das weitere Vorgehen im Unterricht zu klären, ob die Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit der Term-Struktur $A \cdot (B + C)$ haben, ob die Vorstellung von Variablen nicht ausgeprägt ist oder ob der diskontinuierliche Text nicht ausreichend entschlüsselt werden kann.

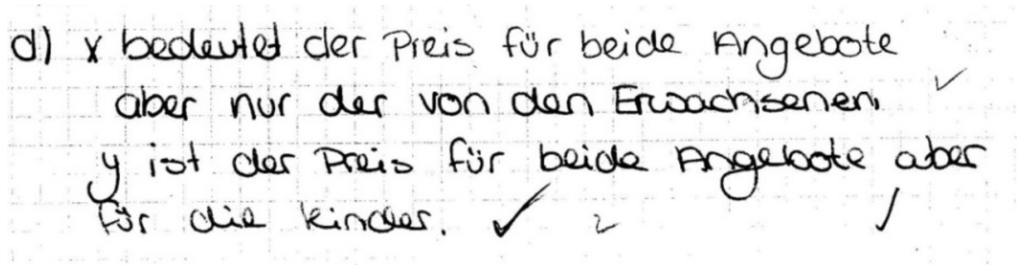

d) x bedeutet der Preis für beide Angebote aber nur der von den Erwachsenen. ✓
y ist der Preis für beide Angebote aber für die Kinder. ✓ 2

Abbildung 2: Die beiden Variablen x und y wurden hier als Kosten und nicht als Anzahl interpretiert. Die Bearbeitung wurde dennoch mit 2 von 2 Punkten gewertet.

Die ungenaue Zuweisung ist häufig nicht nur auf sprachliche Schwierigkeiten zurückzuführen. In dem o. g. Beispiel wurde die fehlerhafte Bearbeitung als vollständig richtig gewertet. Im Unterricht ist aber insbesondere bei sprachlichen Schwierigkeiten auf eine angemessene Sprache und vor allem auf sprachliche Präzision zu achten. Geeignete Hilfsgerüste (scaffolds) müssen zum Beschreiben der Zusammenhänge zunächst bereitgestellt werden, um später wieder abgebaut zu werden, wenn die Sprache sich zusammen mit der (mathematischen) Vorstellung festigt. Anregungen zu einem sprachsensiblen Fachunterricht sind auf den Internetseiten zur Schulentwicklung zu finden.[3]

Nur wenige Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, die Variablen in der Aufgabe als veränderliche Größe aufzufassen und dies zu verbalisieren. Es fällt aber auch den Lehrkräften schwer, die Güte einer Lösung in diesem Zusammenhang zu honorieren. Die Schülerbearbeitung in der folgenden Abbildung 3 wird mit einem Punkt bewertet, obwohl der Prüfling beschreibt, dass durch die Änderung der Variablen sich der Wert des Terms verändert und dass die Variablen die Anzahlen beschreiben. Das in der Auswertungsanleitung genannte Kriterium „Der Prüfling gibt

[3] http://www.schulentwicklung.nrw.de/cms/sprachsensibler-fachunterricht

die Bedeutung der Variablen an“ ist sicherlich ebenfalls erfüllt, es fehlt die in der Beispiellösung, aber nicht im Kriterium angegebene Zuweisung zur Anzahl der Jugendlichen und zur Anzahl der Erwachsenen. Im Unterricht bietet eine solche Beschreibung einen guten Anlass, über verschiedene Bedeutungen von Variablen zu sprechen.

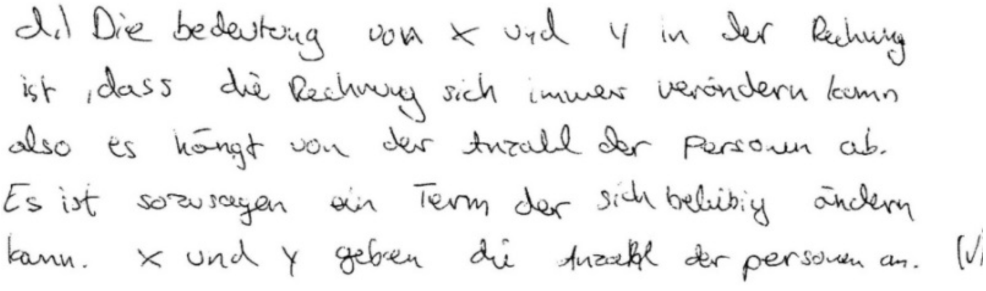

d.) Die bedeutung von x und y in der Rechung
ist, dass die Rechung sich immer verändern kann
also es hängt von der Anzahl der Personen ab.
Es ist sozusagen ein Term der sich beliebig ändern
kann. x und y geben die Anzahl der personen an. (V

*Abbildung 3: Die beiden Variablen **x** und **y** werden als Veränderliche erfasst und der Anzahl der Personen zugeordnet.*

Lernaufgaben, Aufgaben zum Argumentieren und zum Diskutieren

Analog zu dem o. g. diagnostischen Aspekt dieser Aufgabe kann diese Aufgabe im Unterricht leicht zu einer Lernaufgabe geöffnet werden, zum Diskutieren und zum Argumentieren anregen.

Dabei kann das Aufstellen geeigneter Terme eingefordert werden. Diskutiert werden sollte im Anschluss daran, welche Terme nur für die eine Situation geeignet sind, und welche Terme gültig bleiben, wenn sich ein Teilaspekt ändert. Bei allen Veränderungen von Aufgaben ist aber immer das Ziel der Variation zu beachten: Was will ich mit dieser Veränderung erreichen? Welche Kompetenzen spreche ich besonders an, welche Kompetenzen werden durch die veränderte Aufgabe nicht (mehr) benötigt?

Aufgaben zum Variablenkonzept:

- Zu Klasse 10a kommen zwei neue Schüler dazu. Ist der Term weiterhin geeignet, die Kosten zu bestimmen? Begründe deine Entscheidung.
- Welche Werte können die Variablen x und y annehmen? Begründe deine Aussagen im Sachzusammenhang.
- Merle behauptet: „Die Variable x steht für die Kosten der Erwachsenen, y für die Kosten der Jugendlichen.“ Hat Merle recht? Begründe.
- Tina notiert sich: „Durch x und y kann sich der Wert des Terms beliebig verändern. Die beiden Variablen stehen für die Anzahl an Personen.“

  Was meint Tina damit? Gilt Tinas Aussage für bestimmte Werte? Gilt Tinas Aussage immer? Warum gilt sie immer bzw. warum gibt es Einschränkungen?

Aufgaben zur Bedeutung des Gleichheitszeichens:

- Tim notiert die Gleichung: $x \cdot 34 = y \cdot 19{,}5$. Was hat Tim übersehen? Schreibe Tim einen Tweet (eine SMS), was er beachten muss.

Aufgaben zur Beschreibungsgleichheit von Termen:

- Der Term hat die Struktur $A + B$. Übertrage den Term in dein Heft und markiere A und B. Welche Bedeutung haben A und B im Sachzusammenhang?

- Marek meint: „Der Term $31{,}5 \cdot x + 22 \cdot y$ ist ebenfalls geeignet, die Kosten für die Klasse zu berechnen.“ Welche Vorteile und welche Nachteile entstehen durch diese Darstellung?
- Der Anbieter für die Hafenrundfahrt wirbt damit, die Preise günstiger gestaltet zu haben: Erwachsene und Jugendliche bezahlen nun 15 €.

  i) Hat der Anbieter recht? Begründe auf drei unterschiedlichen Wegen.

  ii) Wird die Klassenfahrt für die Klasse insgesamt günstiger oder teurer?

  iii) Wie lautet der neue Term für die Berechnung der Kosten? Ergänze:

$$\text{Kosten} = x \cdot (\qquad + \qquad) + y \cdot (\qquad + \qquad)$$

Sicherlich ist es für die Schülerinnen und Schüler interessanter, wenn der Sachbezug zur eigenen Lerngruppe hergestellt wird: Planung einer eigenen Klassenfahrt, eines Ausflugs etc.

Das Verständnis von Term und Variable kann nicht erst mit Beginn der Jahrgangsstufe 8 im Zusammenhang mit linearen Funktionen aufgebaut werden. Die Idee, Variablen als Platzhalter für konkrete Werte zu nutzen, muss deutlich früher eingeführt, genutzt, geübt und schließlich sukzessive erweitert werden, mit Termen, Formeln und funktionalen Ansätzen sinnvoll verknüpft werden. Es ist dabei sinnvoll, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung der unterschiedlichen Bedeutungen entwickeln und diese in mathematischen Kontexten oder Sachzusammenhängen auch beschreiben können.
Die verbindliche Festlegung von besonders wichtigen Vorstellungen und ggf. auch wiederkehrenden und zu erweiternden Beispielen ist eine Aufgabe der Fachkonferenz im Rahmen der Arbeit an den schulinternen Lehrplänen. Anregungen zum Aufbau eines nachhaltigen Term- und Variablenkonzepts sind auf der Internetseite zur Schulentwicklung im Fach Mathematik zu finden.[4]

[4] http://www.schulentwicklung.nrw.de/cms/faecher/mathematik/

2.3 Modellieren mit quadratischen Funktionen (MSA)

Scheitelpunkte und Achsenabschnitte nutzen

MSA 2016 – Wurfparabel

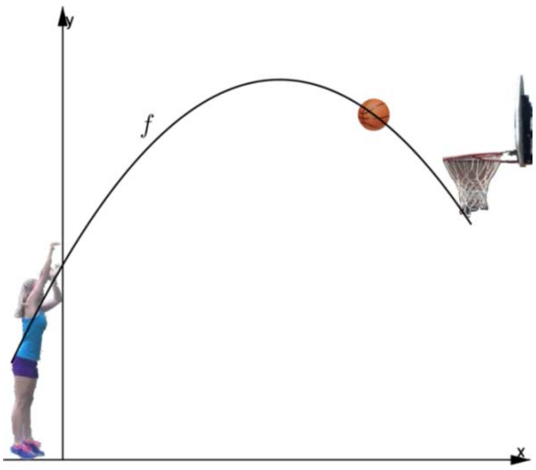
Antje steht mindestens 4 m von ihrem Basketballkorb entfernt und übt Korbwürfe. Sie hält ihre Würfe mit Videoaufnahmen fest. Die Flugbahn des abgebildeten Wurfes kann näherungsweise durch die Funktion

$$f(x) = -0{,}4x^2 + 1{,}7x + 1{,}9$$

beschrieben werden.

b) Bestimme, aus welcher Höhe Antje den Ball abwirft.

c) Berechne, wie hoch der Ball maximal bei diesem Wurf fliegt.



Auswertungsanleitung für die Lehrkraft

b)	wählt einen geeigneten Ansatz und bestimmt die Abwurfhöhe.	Gesucht ist der Wert bei $x = 0$. $f(0) = 1{,}9$, daher wirft Antje aus 1,9 m ab.	3
c)	wählt einen geeigneten Ansatz und berechnet die maximale Wurfhöhe.	Am Scheitelpunkt wird die Höhe maximal: $f(x) = -0{,}4x^2 + 1{,}7x + 1{,}9$ $= -0{,}4(x - 2{,}125)^2 \ldots$ $x = 2{,}125$ $f(2{,}125) = 3{,}706 \ldots$ Die maximale Höhe beträgt ca. 3,7 m.	1 2
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist. (3)		

Bei Teilaufgabe b) müssen die Schülerinnen und Schüler die Abwurfhöhe als den Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der y-Achse erkennen und diesen mithilfe der Funktionsgleichung bestimmen. Dafür müssen sie einen Zusammenhang zwischen dem Graphen und der Term-Darstellung der Funktion herstellen können. Dies gelingt nur einem Drittel der Prüflinge.

Das Werfen eines Basketballs und das Üben von Korbwürfen sind den Schülerinnen und Schülern bekannt, zum Teil kennen sie sogar bereits Videoanalysen aus dem Unterricht oder am eigenen Smartphone oder am PC mit frei zugänglichen Apps.

Teilaufgabe c) fordert die Berechnung der y-Koordinate des Scheitelpunkts. Zunächst ist in der Realsituation oder im Realmodell zu erfassen, dass die maximale Höhe (und nicht die Entfernung zwischen Abwurf und dem Boden o. Ä.) gesucht wird, und dass sich diese am höchsten Punkt der Flugbahn befindet. Dieser muss als Scheitelpunkt des mathematischen Modells aufgefasst werden und schließlich berechnet werden. Die y-Koordinate des berechneten Scheitelpunkts ist wieder im Realmodell als maximale Höhe zu interpretieren. Idealerweise sollten Schülerinnen und Schüler das Ergebnis auch einer Plausibilitätsprüfung unterziehen, was aber in den Bewertungsvorgaben nicht mit Punkten honoriert wird. Drei von vier Prüflingen erzielen bei dieser Aufgabe keinen Punkt. Die Stichprobe 2 zeigt, dass ca. 40 % der Prüflinge gar keinen Lösungsversuch unternommen haben.

In der Aufgabenstellung wird durch die Aufforderung „Berechne“ verlangt, dass die Prüflinge einen geeigneten rechnerischen Ansatz wählen und mit diesem den Scheitelpunkt rechnerisch bestimmen. Dies kann auch unter Verwendung des Taschenrechners erfolgen. Das Ablesen oder Abschätzen anhand der Flugbahn ist somit zwar eine zielführende, aber keine hinreichende Lösung dieser Aufgabenstellung.
Im Folgenden werden daher geeignete Lösungsansätze im Sinne der Aufgabenstellung, andere zielführende Ansätze, die jedoch nicht hinreichend im Sinne der Aufgabenstellung sind, sowie nicht zielführende Ansätze unterschieden. Die angegebenen Bewertungen beziehen sich auf das Kriterium der Bewertungsvorgaben und berücksichtigen dabei die von den Prüflingen erreichten Lösungsschritte angemessen.

Geeignete Lösungsansätze im Sinne der Aufgabenstellung

1. *Die Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform umformen, die y-Koordinate der Scheitelpunktform entnehmen:*
   In der Regel versuchen die Prüflinge, die Funktionsgleichung vollständig in die Scheitelpunktform umzuformen. Bei der Hälfte der Bearbeitungen führt dieser Ansatz schließlich zum richtigen Ergebnis, die häufigste Fehlerursache liegt in fehlerhaften Termumformungen (vgl. Abschnitt 2.2 Grundverständnis von Variablen und Termen (HSA)).
2. *Die Nullstellen berechnen und mithilfe dieser den Scheitelpunkt bestimmen:*
   Von den Schülerinnen und Schülern, die diesen Weg wählten, haben nur 15 % den Weg bis zum Ende verfolgt. In den meisten Fällen wird die errechnete positive Nullstelle als maximale Höhe des Balls angegeben. Mögliche Erklärungen können zum einen fehlende Vorstellungen über wichtige Stellen quadratischer Funktionen sein, zum anderen können diese Fehler auf ein sprachliches Problem dieser Prüflinge hindeuten, dass sie die Höhe mit der Weite verwechseln. Möglich wäre aber auch, dass die Schülerinnen und Schüler zwar eine Idee von dem Lösungsweg haben, diesen aber nicht bis zum Ende verfolgen, sondern bereits nach dem ersten Teilschritt das Ergebnis als Lösung nutzen.
   Insgesamt fällt bei der Auswertung dieser Lösungsversuche auf, dass es den meisten Prüflingen nicht gelingt, die Lage der Nullstellen richtig zu berechnen.

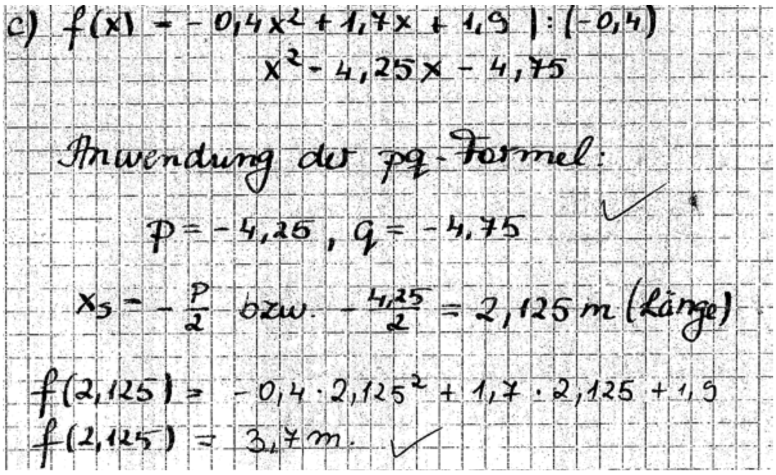

c) $f(x) = -0{,}4x^2 + 1{,}7x + 1{,}9 \quad | :(-0{,}4)$
$x^2 - 4{,}25x - 4{,}75$
Anwendung der pq-Formel:
$p = -4{,}25$, $q = -4{,}75$
$x_S = -\frac{p}{2}$ bzw. $-\frac{4{,}25}{2} = 2{,}125$ m (Länge)
$f(2{,}125) = -0{,}4 \cdot 2{,}125^2 + 1{,}7 \cdot 2{,}125 + 1{,}9$
$f(2{,}125) = 3{,}7$ m.

Abbildung 4: Nullstellenberechnung mithilfe der pq-Formel und finden des Scheitelpunkts über die Symmetrie einer Parabel

3. *Mit der entsprechenden Formel die Koordinaten des Scheitelpunkts bestimmen:*
   Dieser Ansatz wird nur vereinzelt gewählt, führt aber in 80 % zur richtigen Lösung. Die Schülerinnen und Schüler haben erfasst, dass der Scheitelpunkt zu bestimmen ist und verfolgen einen zielführenden Weg. Sie müssen die Variablen aus der Formel mit der Funktionsgleichung in Zusammenhang bringen und anschließend den Wert des Terms berechnen. Im Gegensatz zu den beiden o.g. Wegen müssen keine Zwischenergebnisse ermittelt und keine Terme umgeformt werden (Abbildung 5).

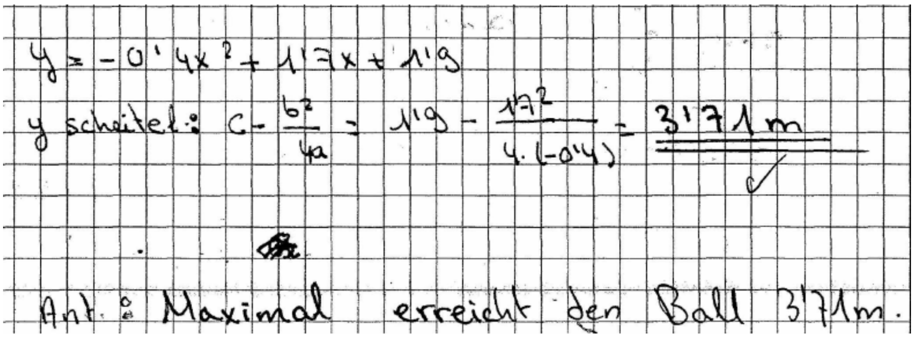


Abbildung 5: Beispiel zur Berechnung der y-Koordinate des Scheitelpunkts mithilfe einer geeigneten Formel

Zielführende, aber nicht rechnerische Ansätze

4. *Einsetzen eines geschätzten x-Wertes und berechnen der y-Koordinate:*
   Bei dem häufig gewählten Ansatz setzen fast 60 % mit $x = 2$ einen geschätzten Wert in die Funktionsgleichung ein und gelangen zu dem im Sachzusammenhang angemessenen Ergebnis, dass der Ball maximal 3,7 m hoch fliegt. In den meisten Fällen wird nicht dargelegt, wie der x-Wert bestimmt wird. Die Schülerinnen und Schüler haben im Realmodell erkannt, dass der höchste Punkt gesucht wird, berechnen mithilfe des Schätzwerts dessen y-Koordinate und interpretieren diese folgerichtig im Sachkontext. Im Rahmen der Kriterien und der geleisteten Teilschritte ist ein Punkt eine angemessene Bewertung.
   Einige Bearbeitungen legen nahe, dass die Schülerinnen und Schüler durch (z. T. systematisches) Probieren mehrerer Werte für x das Maximum der Funktionsgleichung durch ein angemessenes Näherungsverfahren ermitteln. Dabei können je nach Güte der Lösung weitere Teilpunkte vergeben werden (Abbildung 6).

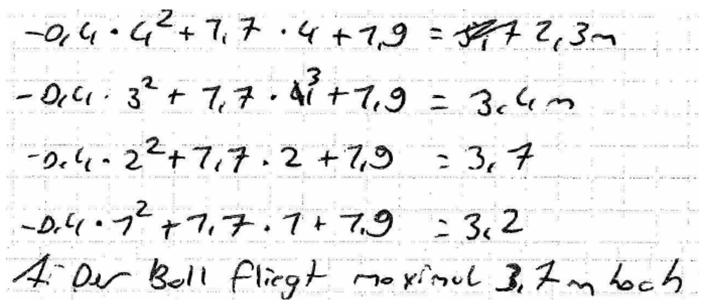


Abbildung 6: Das Maximum der Funktionsgleichung wird durch systematisches Probieren ermittelt. Die getroffene Aussage ist jedoch nicht hinreichend begründet, da bei $x = 2$ offensichtlich nicht der Scheitelpunkt liegt.

5. *Schätzen der Höhe anhand abgebildeter Bezugsgrößen:*
   Als Bezugsgrößen werden die Körpergröße, die Abwurfhöhe, die Höhe des Korbrings oder der Rückwand gewählt. Nahezu alle Ergebnisse liegen in einem realistischen Bereich. Das Abschätzen ist nicht als richtige Lösung zu akzeptieren, da hier weder ein rechnerischer An-

satz gewählt wird, noch eine Berechnung erfolgt. Falls deutlich wird, dass der Scheitelpunkt der abgebildeten Parabel bestimmt werden soll, kann ggf. ein Punkt vergeben werden.

Nicht zielführende oder nicht nachvollziehbare Ansätze

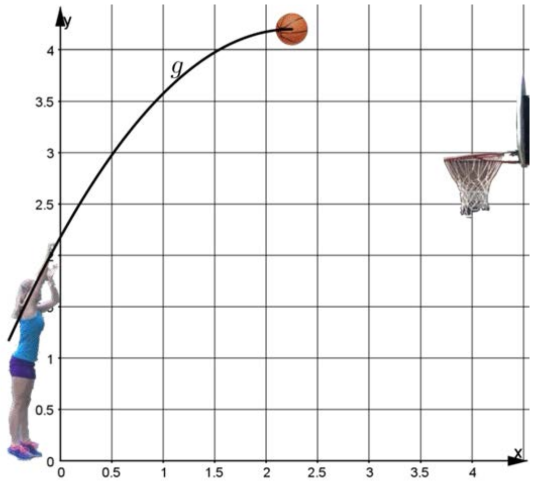
Diese Bearbeitungen sind in der Regel mit null Punkten zu bewerten. Ein Beispiel dafür ist das Nennen eines Wertes. Die Werte schwanken zwischen 1,70 m und 6,66 m. Nur ein Viertel nennt einen realistischen Wert.

Argumentieren und Modellieren am Graphen einer quadratischen Funktion

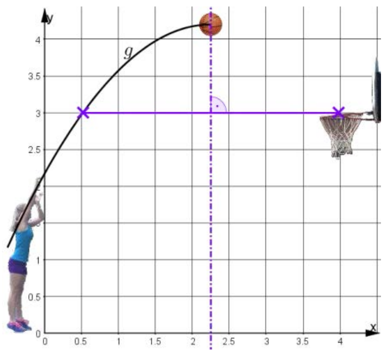
MSA 2016 – Wurfparabel

d) *Antje verändert ihren Wurf und wirft dabei aus 2,25 m Höhe ab. Die Flugbahn g ist nur bis zum höchsten Punkt abgebildet.*

Trifft Antjes Ball in den Korb? Begründe deine Entscheidung mithilfe des abgebildeten Graphen.



Auswertungsanleitung für die Lehrkraft

d)	Der Prüfling wählt einen geeigneten Ansatz und begründet seine Entscheidung.	 An der senkrechten Geraden durch den Scheitelpunkt wird der Graph von g gespiegelt. Der Ball trifft also in den Korb. *(Nachvollziehbare zeichnerische oder schriftliche Begründungen sind zu akzeptieren.)*	3
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist. (3)		

In Teilaufgabe d) müssen die Prüflinge eine begründete Entscheidung treffen, ob der Ball den Korb trifft oder nicht. Etwa einem Drittel der Schülerinnen und Schüler gelingt es, die Aufgabe vollständig richtig zu lösen. Bei einem Großteil der Schülerinnen und Schüler ist die Vorstellung von der Symmetrie einer Parabel nicht vorhanden oder sie kann im Sachkontext nicht genutzt werden.

Das grafische Lösen erweist sich hier als besonders zielführend. Prüflinge, die diesen Lösungsweg gewählt haben, erreichen deutlich mehr Punkte als diejenigen, die auf der verbalen oder formalen Ebene argumentieren. Letztere sind auch nur vereinzelt vollständig richtig.

Bei der Bewertung von Lösungen sollte sich die Lehrkraft stets vergewissern, für welche (Teil-) Leistungen Punkte vergeben werden. Ein korrektes Weiterzeichnen der Parabel etwa zeigt, dass der Prüfling die Symmetrie der Parabel verstanden hat und für seine Lösung nutzt. Die Schlussfolgerung, dass Antje den Korb trifft, ist daher hinreichend begründet, da die Parabel bereits durch den Korbring führt. Diese Lösung sollte mit 3 von 3 Punkten bewertet werden.

Wird eine nicht geeignete oder nicht angemessene zeichnerische Bearbeitung dennoch richtig interpretiert, wird bereits die in der Aufgabe geforderte Kompetenz des Modellierens gezeigt und sollte entsprechend auch mit einem Punkt gewertet werden. Wohingegen die Angabe „Ja, der Ball trifft den Korb“ ohne Begründung kein Kriterium der Aufgabenstellung erfüllt und entsprechend mit null Punkten zu werten ist.

Anregungen zur Unterrichtsgestaltung

Die drei ausgewerteten Teilaufgaben sprechen unterschiedliche Aspekte des Modellierens an. Im Unterricht ist es sinnvoll, diese verschiedenen Aspekte des Modellierens explizit zu thematisieren, damit die Schülerinnen und Schüler sie auf andere Situationen oder Aufgabenstellungen übertragen können. Im Folgenden werden zum einen Variationen der Prüfungsaufgaben aufgezeigt, die jeweils an einem bestimmten Teilschritt des Modellierens ansetzen. Zum anderen regen nicht auf den Kontext Basketball bezogene Aufgaben zum Weiterarbeiten, Argumentieren und Diskutieren an und können auch auf andere Kontexte übertragen werden.

Bezugspunkt ist der vereinfachte Lösungsplan zum Modellierungskreislauf nach Blum (2007). Dieser stellt eine schülergerechte Version dar, an der sich auch Schülerinnen und Schüler bei der Lösung von Sachaufgaben orientieren können.

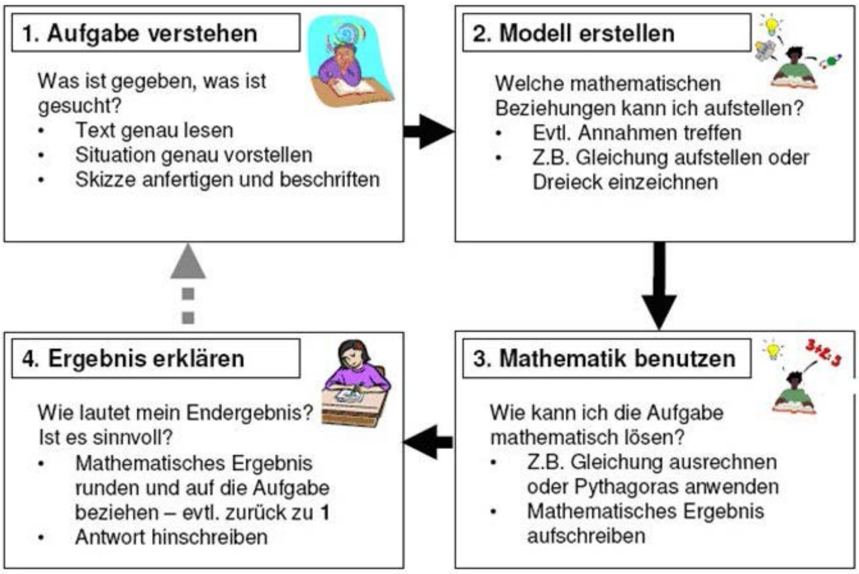


Abbildung 7: Vereinfachter Lösungsplan zum Modellierungskreislauf nach Blum (2007)

Aufgaben zum „Aufgabe verstehen“ – Was ist gegeben, was ist gesucht?

- Beschreibe, was du siehst / was dargestellt wird.
- Fertige eine Skizze an und beschrifte diese.
- Formuliere Fragen, die du dir zu dem Bild / zu der Situation stellst.

Das Formulieren eigener Fragen durch die Schülerinnen und Schüler kann den Blick durch die „mathematische Brille“ schärfen.

Aufgaben zum „Modell erstellen“ – Welche mathematischen Beziehungen kann ich aufstellen?

- Beschreibe, welche Informationen du benötigst, um die Aufgabe / Frage zu beantworten.
- Markiere den gesuchten Punkt in der Zeichnung und benenne ihn mit dem mathematischen Begriff.
- Welche Form der Funktionsgleichung ist geeignet, um direkt
  - i) die Abwurfhöhe zu bestimmen?
  - ii) die maximale Höhe zu berechnen?
  - iii) zu berechnen, wie weit der Ball fliegt?

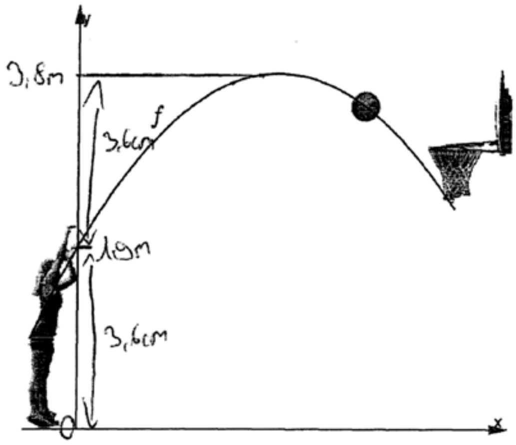
Aufgaben zum „Mathematik benutzen“ – Wie kann ich die Aufgabe mathematisch lösen?

zu Teilaufgabe c)

- Berechne mithilfe der Funktionsgleichung, wie hoch der Ball bei diesem Wurf maximal fliegt.
- Forme die Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform um und bestimme, wie hoch der Ball bei diesem Wurf maximal fliegt.
- Melanie und Konstantin haben auf unterschiedliche Weise bestimmt, wie hoch der Ball bei diesem Wurf fliegt. Vergleiche die beiden Wege und begründe, welchen Weg du besonders geeignet findest.

<table>
<tr>
<td>Melanie:
c) $f(x) = -0,4x^2 + 1,7x + 1,9 \mid :(-0,4)$
$x^2 - 4,25x - 4,75$
Anwendung der pq-Formel:
$p = -4,25$, $q = -4,75$
$x_S = -\frac{p}{2}$ bzw. $-\frac{4,25}{2} = 2,125$ m (Länge)
$f(2,125) = -0,4 \cdot 2,125^2 + 1,7 \cdot 2,125 + 1,9$
$f(2,125) = 3,7$ m.</td>
<td>Konstantin:
Maximum Berechnen:
$f(x) = -0,4x^2 + 1,7x + 1,9$
$f(x) = 0$
$0 = -0,4x^2 + 1,7x + 1,9 \quad \mid :-(0,4)$
$0 = x^2 - 4,25x - 4,75 \quad p = -4,25 \; q = -4,75$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$x_{1,2} = 2,125 \pm \sqrt{\left(\frac{-4,25}{2}\right)^2 + 4,75}$
$x_{1,2} = 2,125 \pm 3,044$
$x_1 = -0,919$ m $\quad x_2 = 5,169$ m
$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-0,91 + 5,169}{2} = 2,125$ m
$f(2,125) = -0,4 \cdot 2,125^2 + 1,7 \cdot 2,125 + 1,9$
$= 3,70625$ m
$\approx 3,7$ m</td>
</tr>
</table>

- Maxi hat die Aufgabe wie folgt gelöst (siehe Abbildung). Sie notiert: „Der Ball fliegt maximal 3,8 m hoch."



  i) Welche Vorteile und welche Nachteile hat ihr Verfahren?

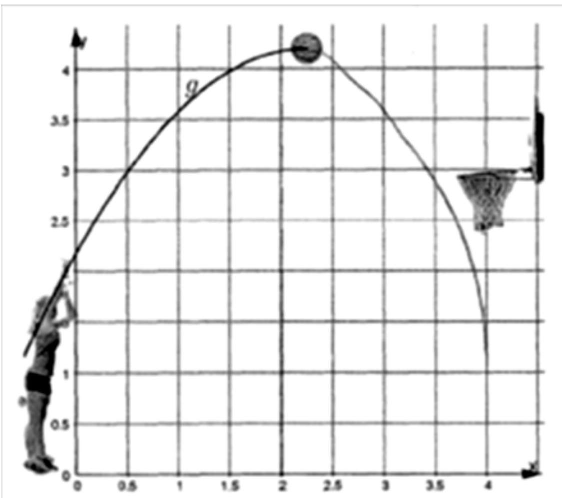
  ii) Entscheide und begründe, ob ihr Weg die Aufgabe vollständig löst.

- Merit hat die beiden Nullstellen $x_1 = 5{,}17$ und $x_2 = -0{,}92$ der Funktion berechnet. Beschreibe, wie du damit den Scheitelpunkt bestimmen kannst.
- Benenne typische Fehler beim Umformen der Funktionsgleichung von der allgemeinen Form in die Scheitelpunktform.

zu Teilaufgabe d)

- Antje verändert ihren Wurf und wirft dabei aus 2,25 m Höhe ab. Die Flugbahn g ist nur bis zum höchsten Punkt abgebildet. Zeichne die Flugbahn weiter und entscheide begründet, ob Antje den Korb trifft.
- Antje verändert ihren Wurf und wirft dabei aus 2,25 m Höhe ab. Die Flugbahn g kann annähernd mit der Funktionsgleichung $g(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}4x + 2{,}25$ beschrieben werden. Trifft Antjes Ball in den Korb? Begründe deine Entscheidung mit einer Rechnung.
- Die beiden folgenden Lösungsansätze sind falsch. Beschreibe jeweils, welche Fehler gemacht wurden:

  i)



„Der Ball trifft den Korb nicht."

ii)

$-0{,}4x^2 + 1{,}7x + 2{,}25$

$-0{,}4 \cdot 4^2 + 1{,}7 \cdot 4 + 2{,}25 = 2{,}65$

A: Der Ball hat nach einer Entfernung von 4m eine Höhe von 2,65 m und wird den Korb so knapp verfehlen

Aufgaben zum „Ergebnis klären“ – Wie lautet mein Endergebnis? Ist es sinnvoll?

- Kann $S(4|7)$ die maximale Höhe / der gesuchte Scheitelpunkt sein? Entscheide und begründe auf zwei unterschiedlichen Wegen.
- Karem hat für die maximale Höhe 11,25 m berechnet. Wie kann er anhand der Grafik erkennen, dass dieses Ergebnis falsch ist?

Zu diesem Aspekt ist in der Zeitschrift „Mathematik 5 bis 10“ (Thiemann, 2016) eine interessante Aufgabe dargestellt. Im Kontext einer vergleichbaren Aufgabe trifft der Graph der Funktion sehr flach auf den Basketballkorb und geht durch den Korbring. Den Schülerinnen und Schülern wird hier deutlich, dass das mathematische Ergebnis auch im Modell vernünftig zu deuten ist. Das Finden geeigneter weiterer Anforderungen an das mathematische Modell und die Diskussion darüber trainiert viele, durchaus lebens- oder berufspraktische Kompetenzen. Das Einhalten der neuen Grenzen muss und wird dabei vermutlich nicht formal-mathematisch erfolgen: Messen und Zeichnen sind zugänglichere Varianten. Dennoch bietet sich hier eine Schnittstelle für die Analytische Geometrie der gymnasialen Oberstufe.

2.4 Erfassung und Bewertung der Leistung (HSA und MSA)

Vorgegebene Kriterien zur Auswertung der Prüfungsarbeiten

Die Erfassung der Leistung erfolgt über die in der Auswertungsanleitung dargelegten Kriterien, die zu jeder Teilaufgabe einen konkretisierten Bezug zu den Kompetenzerwartungen der Kernlehrpläne herstellen, eine illustrierende Beispiellösung der Aufgabe anführen und die maximal erreichbaren Punkte vorgeben. Die Kriterien können direkt aus der Aufgabenstellung abgeleitet werden und nennen wesentliche Lösungsschritte, die insgesamt für die vollständige Bearbeitung zu leisten sind.

Prinzipiell sollen die Bearbeitungen nachvollziehbar sein, wobei das Bewerten der mathematischen Kompetenzen im Vordergrund steht. Mängel in der Darstellungsleistung oder im Umgang mit Einheiten werden daher an anderer Stelle gewertet. Das alternative Kriterium („wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist“) trägt der Tatsache Rechnung, dass bei vielen Teilaufgaben mehrere Lösungswege möglich und, auf die Bewertung bezogen, gleichwertig sind.

Zuordnung von Punkten

Die maximal zu erreichenden Punkte in der rechten Spalte sind teilweise auf einzelne Lösungsschritte der Beispiellösung aufgeteilt. Bearbeitungen, die diese Teilkompetenzen aufweisen, sind entsprechend zu werten. Andere Teilpunkte dürfen und sollen im vorgegebenen Rahmen vergeben werden. Dabei dürfen jedoch nur ganzzahlige Punkte vergeben werden.

Wenn eine Lösung/Bearbeitung stark von der Beispiellösung abweicht, muss die Lehrkraft entscheiden, inwieweit diese eine der Beispiellösung gleichwertige Lösung ist. Die Aufgabenstellung und die in der Bewertungsvorgabe dargestellten Kriterien sind dabei entscheidend. Die Bewertung muss durch nachvollziehbare Kriterien erfolgen (vgl. Beispiele im Kapitel 2.3).

Häufiger nachgefragt wird, warum es für Aufgaben mit geringerem Bearbeitungsumfang viele Bewertungspunkte im Vergleich zu einigen Aufgaben mit höherem Bearbeitungsaufwand gibt. Die beiden wichtigsten Kriterien sind die Relevanz einer Tätigkeit für das Fach und die geschätzte Bearbeitungsdauer. Anspruchsvolle Aufgaben gehen daher vom zeitlichen Aufwand im angemessenen Umfang und von der Bewertung zu insgesamt maximal 13 % in die Prüfung ein.

Ebenso erreichen uns hin und wieder Anfragen, warum bei Aufgaben, bei denen Aussagen durch Ankreuzen beurteilt werden müssen („Ankreuzaufgaben“, vgl. z. B. HSA II.2 f)), nicht für jede Aussage jeweils ein Punkt vergeben wird. Dass die Punktezuordnung sich auf die gesamte Teilaufgabe bezieht, hat mit einer andernfalls sehr hohen „Ratewahrscheinlichkeit“ zu tun. Die Wahrscheinlichkeit, durch zufälliges Ankreuzen mindestens eine richtige Antwort zu erzielen, beträgt immerhin 87,5 %.

<table>
<tr>
<td>f)</td>
<td>Der Prüfling entscheidet, welche Formeln geeignet sind.</td>
<td>
<table>
<tr><th>Formel</th><th>geeignet</th><th>nicht geeignet</th></tr>
<tr><td><code>= D16/30</code></td><td></td><td>☒</td></tr>
<tr><td><code>= E6+E14</code></td><td>☒</td><td></td></tr>
<tr><td><code>= D6/B6+C8+C11</code></td><td>☒</td><td></td></tr>
</table>

(Zwei richtige Antworten ergeben einen Punkt.)
</td>
<td>2</td>
</tr>
</table>

Illustrierende Beispiele:

MSA 2016 – II.1 Wurfparabel

Antje hält ihren neuen Basketball auf 2 m Höhe und lässt ihn auf den Boden fallen. Nach jeder Bodenberührung springt der Ball auf jeweils 70 % der Höhe des letzten Sprunges zurück.

e) Wie hoch springt der Ball nach zwei Bodenberührungen?

f) Der Hersteller wirbt damit, dass der Ball bei einem Fall aus 2 m Höhe nach 10 Bodenberührungen noch 10 cm hochspringt. Überprüfe die Herstellerangabe.

g) Gib einen Term an, mit dem du die Rückprallhöhe eines Basketballs bei einem Fall aus 2 m Höhe für eine beliebige Anzahl von Bodenberührungen berechnen kannst.

Unterlagen für die Lehrkraft zu Aufgabe II.1

Aufgabe	Kriterien	Beispiellösung	Punkte
	Der Prüfling …		
e)	ermittelt die Höhe nach zwei Bodenberührungen.	$2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}98$ Der Ball sollte nach zwei Bodenberührungen etwa 1 m hoch springen.	3
f)	überprüft die Angabe des Herstellers.	$2 \cdot\ 0{,}7^{10} = 0{,}056$ ... Der Ball springt nur noch 5,6 Zentimeter hoch. Die Angabe stimmt nicht.	3
	wählt einen anderen Lösungsweg, der sachlich richtig ist. (3)		
g)	ermittelt einen geeigneten Term.	$2 \cdot 0{,}7^k$, wobei k die Anzahl der Bodenberührungen darstellt.	1

Offensichtlich sind die drei aufeinanderfolgenden Aufgaben unterschiedlich anspruchsvoll. Während die erste Teilaufgabe e) auch mithilfe der Prozentrechnung direkt zu lösen ist und zwei Dritteln der Prüflinge dies auch gelingt, wird in der folgenden Teilaufgabe f) mit den zehn Bodenberührungen erwartet, dass ein anderer, abstrakterer Lösungsweg gewählt wird. Dennoch wird die Aufgabe ebenfalls lediglich mit maximal drei Punkten gewertet, die zu etwa 50 % ausgeschöpft werden. Sicherlich ist das zeitaufwändigere, schrittweise Vorgehen ebenfalls eine geeignete Lösung im Sinne der Aufgabenstellung und ist daher ebenso vollständig richtig zu werten. Es existieren weitere zielführende Lösungsansätze, z. B. durch das Lösen der Ungleichung: $2 \cdot\ 0{,}7^{\mathrm{k}} \leq 0{,}1$, die aber zumindest in den eingereichten Lösungen von den Prüflingen nicht gewählt worden sind.
Zu beachten ist, dass in allen Fällen die Interpretation des mathematischen Ergebnisses auf das Realmodell erfolgen muss („Die Angabe stimmt nicht“). Fehlt diese Interpretation, so wären hier maximal zwei Bewertungspunkte angemessen.
Falls die Angabe 10 cm nicht korrekt in 0,1 m umgewandelt werden konnte, die Bearbeitung an sich aber folgerichtig erfolgt, so wäre diese Bearbeitung ebenfalls mit drei Punkten zu werten. Der Umgang mit Maßeinheiten wird erst am Ende zusammenfassend gewertet.

In der letzten Teilaufgabe g) wird die mathematisch formale allgemeine Beschreibung als Term eingefordert. Das Aufstellen des exponentiellen Terms ist anspruchsvoll und ohne eine Bearbeitung der beiden vorangegangenen Aufgabenteile auch zeitaufwändig. In diesem Kontext ist die

Wertung mit einem Punkt durchaus gerechtfertigt und gelingt erwartungsgemäß etwa 30 % der Prüflinge.

Darstellungsleistung und Umgang mit Maßeinheiten

Die Kriterien zur Auswertung der einzelnen Aufgaben enthalten keine Hinweise zum Umgang mit formalen Fehlern oder dem fehlerhaften Umgang mit Einheiten und Größen. Das bedeutet, dass selbige im Rahmen des Kriterienrasters auch – soweit wie möglich – nicht berücksichtigt werden sollen. Beide Aspekte werden zusammenfassend kompetenzorientiert gewertet und machen nicht mehr als 10 % der Gesamtpunktzahl aus.

Umgang mit Maßeinheiten

HSA		MSA	
Der Prüfling gibt bei Ergebnissen angemessene Maßeinheiten an:		Der Prüfling gibt bei Ergebnissen angemessene Maßeinheiten an:	
☐ nie oder fast nie	(0 Punkte)	☐ nie	(0 Punkte)
☐ teilweise	(1 Punkt)	☐ selten	(1 Punkt)
☐ fast immer oder immer	(2 Punkte)	☐ oft	(2 Punkte)
		☐ immer	(3 Punkte)

Darstellungsleistung

HSA		MSA	
Der Prüfling stellt seine Bearbeitung nachvollziehbar und formal angemessen dar und arbeitet bei erforderlichen Zeichnungen hinreichend genau:		Der Prüfling stellt seine Bearbeitung nachvollziehbar und formal angemessen dar und arbeitet bei erforderlichen Zeichnungen hinreichend genau:	
☐ nie oder fast nie	(0 Punkte)	☐ nie	(0 Punkte)
☐ teilweise	(2 Punkte)	☐ selten	(2 Punkte)
☐ fast immer oder immer	(4 Punkte)	☐ oft	(4 Punkte)
		☐ immer	(6 Punkte)

Prinzipiell muss die beurteilende Lehrkraft abschätzen, wie häufig die Maßeinheiten in den Ergebnissen angemessen verwendet wurden. Dazu kann es sinnvoll sein, dies in der Korrektur extra zu erfassen. Schwieriger scheint den Lehrkräften die Bewertung zu fallen, wenn ein Prüfling sehr wenige Aufgaben bearbeitet hat: Angenommen ein Prüfling hat keine der Aufgaben bearbeitet, bei der Maßeinheiten eine Rolle spielen. Damit hat der Prüfling die Chance nicht genutzt, zu zeigen, dass er mit Maßeinheiten sicher umgehen kann. Somit ist es durchaus folgerichtig, für die nicht erbrachte Leistung auch keinen Punkt zu vergeben. Anders zu werten ist allerdings, wenn ein Prüfling nur wenige Aufgaben bearbeitet hat, aber in diesen Aufgaben Maßeinheiten zu beachten sind. Entsprechend der Auswertungsanleitung muss nun beurteilt werden, wie gut der Prüfling den Umgang mit Maßeinheiten beherrscht.

Die Beurteilung der Darstellungsleistung ist analog vorzunehmen. Auch hier muss die Lehrkraft abschätzen, inwieweit die Bearbeitung nachvollziehbar und formal angemessen dargestellt wurde und bei erforderlichen Zeichnungen hinreichend genau gearbeitet wurde. Eine Besonderheit ist dabei, dass nur die angegebenen Punkte verteilt werden dürfen; eine Wertung z. B. mit 3 Punkten ist nicht vorgesehen.

3. Anhang: Datengrundlage

Die Beobachtungen stützen sich auf folgende Daten, die in jedem Jahr für die beiden Abschlussniveaus (HSA, MSA) erhoben werden:

3.1 Stichprobe 1

Ca. 30 Schulen der am Prüfungsverfahren beteiligten Schulformen werden gebeten, die für jede Teilaufgabe vergebenen Rohpunkte für jeweils eine Lerngruppe zurückzumelden. Die 30 Schulen werden so ausgewählt, dass sie weitgehend repräsentativ für die Schulen der jeweiligen Schulform im Land Nordrhein-Westfalen sind. Die Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler, für die diese Daten vorliegen, wird im Bericht als *Stichprobe 1* bezeichnet. Im Bericht wird schulformübergreifend nach den beiden Abschlüssen differenziert:

- Hauptschulabschluss nach Klasse 10 (HSA): Hauptschulen Klasse 10 Typ A, Gesamtschule Grundkurs
- Mittlerer Schulabschluss (MSA): Hauptschulen Klasse 10 Typ B, Gesamtschule Erweiterungskurs, Realschule

Ausschöpfungsquote (Definition)

Aus der Stichprobe 1 lässt sich für jede Teilaufgabe u. a. die sogenannte *Ausschöpfungsquote* berechnen.

Die Ausschöpfungsquote ist der prozentuale Anteil an der maximal erreichbaren Punktzahl, den Schülerinnen und Schüler in der Klausur im Mittel erzielt haben. Eine Ausschöpfungsquote von 50 % bedeutet also, dass Schülerinnen und Schüler im Mittel die Hälfte der erreichbaren Punkte erzielt haben.

3.2 Stichprobe 2

Um hier tiefer gehende Erkenntnisse zu gewinnen, werden die Schulen über die Dateneingabe hinaus gebeten, anonymisiert jeweils drei Klausuren (eine im oberen, eine im mittleren und eine im unteren Leistungsspektrum) zu kopieren und der Qualitäts- und UnterstützungsAgentur/Landesinstitut für Schule (QUA-LiS) zur Verfügung zu stellen. Die Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler, deren Klausur vorliegt, wird im Bericht als *Stichprobe 2* bezeichnet. Über die Repräsentativität dieser Stichprobe kann nichts ausgesagt werden, da die Auswahl den Schulen obliegt. Dennoch lassen sich aus den Prüfungsarbeiten bei vorsichtiger Deutung der Befunde Erkenntnisse gewinnen, die von allgemeiner Bedeutung sind.

4. Literaturverzeichnis

Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren - zu schwer für Schüler und Lehrer? *Beiträge zum Mathematikunterricht, Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.* 2007, S. 3-12.

Bruder, R. (2008). Wider das Vergessen. Fit bleiben durch vermischte Kopfübungen. *mathematik lehren* (147).

Leuders, Timo & Prediger, Susanne (2016). *Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Ministerium für Schule und Weiterbildung. (2013). *Analysen und Hinweise zur Bearbeitung ausgewählter Aufgaben der Zentralen Prüfungen 10 Mathematik auf der Grundlage der Ergebnisrückmeldung 2010 bis 2012.* Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW, Soest.

QUA-LiS.NRW (2016): *Fachdidaktische Rückmeldung zu den zentralen Prüfungen am Ende der Klasse 10 im Fach Mathematik (2015)*. Soest

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen: Aufgabenvariationen im Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.

Thiemann, J. (2016). Treffer oder kein Treffer – Mit GeoGebra die Flugbahn eines Basketballfreiwurfs beschreiben. *Mathematik 5 bis 10* (37|2016), S. 34 – 37.